

# Einführung in das Physikalische Praktikum A

Stand: WS 2004/05

<b><u>Inhaltsverzeichnis</u></b>	<b><u>Seite</u></b>
Zur Organisation	3
<b>A. Messen mit Unsicherheiten</b>	<b>4</b>
1. Fehlerquellen und Fehlerarten	4
2. Messgröße, Messergebnis und Messunsicherheit	4
3. Fehler- und Ausgleichsrechnung	6
4. Fehlerfortpflanzung	6
5. Ausgleichsrechnung	7
6. Beispiele	8
7. Weiterführende Literatur	13
<b>B. Die Versuche</b>	<b>14</b>
1. Versuch: Stoß, Beschleunigung, harmonische Schwingung	14
Beschleunigte Bewegung, Schiefe Ebene, Bewegungsgleichung	
Stoßgesetze, Energie- und Impulserhaltungssätze, Lineare Schwingungen	
2. Versuch: Gedämpfte und erzwungene Schwingung	19
3. Versuch: Die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern – Wellen	26
Stehende und laufende Wellen, Schwingende Saite	
Schall, Schallausbreitung in festen Körpern und Gasen, Kundtsches Rohr	
4. Versuch: Drehbewegungen und das Trägheitsmoment	31
Trägheitsmoment – Definition und Berechnungen	
Bewegungsgleichungen für die Rotation, Satz von Steiner	
5. Versuch: Spezifische Wärme und Verdampfungswärme von Wasser	38
Wärmemenge, Wärmekapazität, Dulong-Petitsches-Gesetz	
Phasenumwandlung, Umwandlungswärmen, Mischkalorimeter	
6. Versuch: Der Stirling-Motor	44
Ideale Gase, Zustandsänderungen und Zustandsdiagramme	
Allgemeine Zustandsgleichung für ideale Gase	
Stirlingscher Kreisprozess, Wirkungsgrad	
7. Versuch: Oberflächenspannung	50
Spezifische Oberflächenenergie, Oberflächenspannung,	
Benetzende – nicht benetzende Flüssigkeiten, Grenzwinkel, Kapillarität,	
Abreißmethode, Kapillarmethode zur Bestimmung der Oberflächenspannung	
8. Versuch: Spannungs-Dehnungs-Diagramme	54
Aufbau von Festkörpern, Bindungskräfte, Hookesches Gesetz	
Querkontraktion, Spannungs-Dehnungs-Diagramme	
9. Versuch: Optische Geräte und Linsenbrennweiten	62
10. Versuch: Die Absorption von $\gamma$ -Strahlung und Röntgenspektroskopie	68
Röntgenbeugung, Duane-Huntsches Gesetz, Plancksches Wirkungsquant	
<b>C. Anhang: Einführung in die Datenanalyse</b>	<b>76</b>
(nur zur Information)	

## Zur Organisation

- Physikalische Grundlagen, Lehrbücher:
  - Hans J. Paus: Physik in Experimenten und Beispielen.**  
**Carl Hanser Verlag München Wien 1995**
  - P. Dobrinski, Krakau, Vogel: Physik für Ingenieure
  - R. Fleischmann: Einführung in die Physik
  - J. Orear: Physik
- Experimenteller Teil, Auswertung
  - W. Walcher: Praktikum der Physik
  - D. Geschke: Physikalisches Praktikum
  - Die Anleitung zu den Praktikumsversuchen**

## Durchführung

den Versuch aufbauen  
die Messungen durchführen  
die Daten ins Messprotokoll eintragen  
das Protokoll vom Assistenten abzeichnen lassen.

## Auswertung

1. Aufgabenstellung aus der Versuchsanleitung übernehmen.
2. Messwerte aus dem Messprotokoll übernehmen und übersichtlich in einer Tabelle einschließlich ihren Einheiten auflisten.
3. Formel hinschreiben, nach der die Auswertung erfolgt.
4. Die gesuchten Größen  $x$  berechnen. In den Nebenrechnungen Einheiten mitführen.
5. Fehlerrechnung durchführen (Größtfehler oder statistischen Fehler  $\Delta x$  berechnen.)  
Versuchsergebnis angeben:  $x = (x_{\text{mittel}} \pm \Delta x) \cdot \text{Einheit}$
6. Fragen aus der Anleitung diskutieren, eventuell Vergleich mit dem Literaturwert.  
Diskussion der Fehler und Gründe für die Abweichung vom Literaturwert.

## Voraussetzungen für die Zulassung zur Klausur und für den Schein

1. In den *Testaten* müssen mindestens **25** Punkte (von maximal 50) erreicht werden.  
(Es werden 5 von 10 Versuchen in einer mündlichen Prüfung im Praktikum testiert).
2. Alle 10 Versuche müssen ordnungsgemäß durchgeführt und die Protokolle bis zum Klausurtermin testiert sein. (1. und 2. sind Voraussetzung für Teilnahme an Klausur.)
3. In der *Klausur* müssen mindestens **15** Punkte (von maximal 50) erreicht werden.
4. Die *Gesamtsumme* aus den 5 Testaten und der Klausur ist mindestens **50** Punkte von maximal 100 erreichbaren Punkten.

## Ziel des Praktikums

- a) Physikalische Grundlagen durch praktische Erfahrungen vertiefen („learning by doing“).
- b) Planung und Durchführung von Experimenten zur Ermittlung von Messdaten.
- c) Dokumentation (Messprotokolle mit allen relevanten Daten) anlegen.
- d) Bericht abfassen (Darstellung der Tätigkeit/Ergebnisse).
  - Kritik/Auswertung der Messungen
  - Erkennen von Fehlerquellen
  - Fehlerrechnung (mathematische Behandlung von Fehlern).
- e) Einüben der wissenschaftlichen Arbeitsmethodik.

# A. Messen mit Unsicherheiten

Messungen sind stets mit Unsicherheiten verbunden. Daher gehört zu jedem Messergebnis auch die Angabe der Messunsicherheit. Sie zeigt, wie zuverlässig das Messergebnis ist. Ohne die Ermittlung einer Messunsicherheit ist die Messaussage unvollständig und oft sogar unbrauchbar.

## 1. Fehlerquellen und Fehlerarten

In der Messtechnik können verschiedene Fehlerquellen gleichzeitig auftreten:

- Gerätefehler als Folge der Unvollkommenheit der Konstruktion, der Fertigung und Justierung (z.B. Fertigungstoleranzen).
- Verfahrensfehler infolge der Beeinflussung der zu messenden Größe durch das Messverfahren oder durch die Messeinrichtung.
- Umwelteinflüsse als Folge der Änderungen der Einwirkung aus der Umgebung (z.B. Temperatur, Luftdruck, äußere elektrische oder magnetische Felder).
- Experimentator: Fehler infolge unterschiedlicher Eigenschaften und Fähigkeiten des Experimentators (z.B. Aufmerksamkeit, Übung, Schätzvermögen), außerdem auch Irrtümer des Experimentators, Wahl eines ungeeigneten Messverfahrens und Nichtbeachtung von Störeinflüssen, subjektive Bewertung des Ergebnisses.

Es werden zwei Fehlerarten unterschieden, die systematischen und die zufälligen Fehler.

- Die *systematischen Fehler* werden hauptsächlich hervorgerufen durch die Unvollkommenheit der Messgeräte (z.B. Abnutzung, Reibung), der Messverfahren und des Messgegenstandes, in zweiter Linie von Einflüssen der Umwelt und des Experimentators. Sie lassen sich, wenn auch schwierig, ermitteln. Erfassbare systematische Fehler sind durch Berichtigung auszuschalten. Nicht erfassbare systematische Fehler sind bei der Ermittlung der Messunsicherheit durch kritisches Abschätzen zu berücksichtigen.
- Die *zufälligen (stochastischen) Fehler* werden durch nicht erfassbare und beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Messgegenstandes und des Experimentators während der Messung hervorgerufen. Bei Wiederholungen, selbst unter scheinbar genau gleichen Bedingungen, werden die einzelnen Messwerte voneinander abweichen, man sagt: sie streuen. Zufällige Fehler schwanken nach Betrag und Vorzeichen.

Durch *systematische Messfehler* wird ein Messergebnis immer *unrichtig*, durch *zufällige Fehler* wird ein Messergebnis *unsicher*. Eine strenge Unterscheidung zwischen zufälligen und unbekannt systematischen Fehlern ist nicht immer möglich und sinnvoll.

## 2. Messgröße, Messergebnis und Messunsicherheit

Einige wichtige Begriffe sollen vorweg noch definiert werden:

- Die *Messgröße* ist die physikalische Größe, der die Messung gilt. Der Wert einer Meßgröße wird durch das Produkt aus *Zahlenwert und Einheit* ausgedrückt.
- Das *Messergebnis* ist der *Schätzwert der Messgröße*, der durch Auswertung einer Messung erhalten wird.
- Der *(statistische) Fehler (die Messunsicherheit)* ist der Kennwert des vollständigen Messergebnisses, der die *Streuung der Werte charakterisiert*. Er kann der Messgröße entsprechend dem benutzten Mess- und Auswerteverfahren vernünftigerweise zugeordnet oder durch eine statistische Datenanalyse berechnet werden. Der (statistische) Fehler ist

ein Schätzwert für den Teil eines Messergebnisses, innerhalb dessen der wahre Wert der Messgröße liegt. Vorausgesetzt ist, dass alle bekannten systematischen Fehler durch eine Korrektur berücksichtigt wurden.

In der Datenanalyse werden alle physikalischen Größen als Zufallsvariable behandelt, auch die Einflussgrößen. Sie unterscheiden sich dabei von den gemessenen Größen nur dadurch, dass über sie meist weniger Informationen vorliegen. Bei Messreihen unter Wiederholbedingungen tritt in aller Regel eine Streuung der Einzelmesswerte auf, sofern die Auflösung der Messeinrichtung genügend hoch ist. Die Menge der Einzelmessungen nennt man Stichprobe. Aus den Einzelmessungen erhält man nicht den gesuchten wahren Wert  $x_{\text{wahr}}$ , sondern nur einen Schätzwert für  $x_{\text{wahr}}$ . Wenn alle Einzelmessungen gleich gut sind, ist der plausibelste und auch beste Schätzwert der

**arithmetische Mittelwert der Messwerte:** 
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

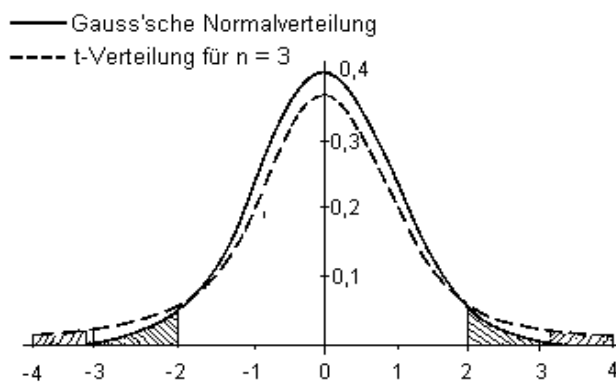
Der **statistische Messfehler der Stichprobe** ist: 
$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

(Würde man  $x_{\text{wahr}}$  kennen, so wäre  $\Delta x = \pm \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - x_{\text{wahr}})^2}$ ).

Dabei ist N die Anzahl der Messungen und  $x_n$  der n-te Messwert ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Die Messfehler, die man aus einzelnen Stichproben ermitteln kann, streuen selber um den statistischen Messfehler, den man bei Kenntnis aus der Grundgesamtheit berechnen würde. Diese Streuung wird mit Hilfe der Student-Verteilung abgeschätzt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit p der gesuchte wahre Wert in einem Bereich  $\bar{x} \pm t \cdot \Delta x$  („den Vertrauensbereich“) erwartet werden kann. Werden nur wenige Messwerte aufgenommen, so sollte man den statistischen Messfehler der Stichprobe durch einen entsprechenden Faktor t aus der Student-Verteilung korrigieren. Das Messergebnis wird dann in der folgenden Form angegeben:

$$\mathbf{x = \bar{x} \pm t \cdot \Delta x \quad \text{mit der Wahrscheinlichkeit } p = \# \%.$$

Die Begründung und die Voraussetzungen für diese Fehlerberechnung gibt uns die mathematische Statistik.



Für große N ( $\rightarrow \infty$ ) geht die Studentverteilung in die Gaußsche Normalverteilung über.

Für eine vernünftige statistische Auswertung sollten daher entsprechend der Tabelle mindestens 10 Messungen durchgeführt werden. Der Aufwand für mehr als etwa 30 Messung lohnt sich dagegen meist nicht.

Die Korrekturfaktoren t aus der Student-Verteilung			
N	p = 95%	p = 99%	p = 99,9%
2	12,7	63,6	636,6
3	4,3	9,9	31,6
4	3,2	5,8	12,9
5	2,8	4,6	8,6
6	2,6	4,0	6,9
7	2,5	3,7	6,0
8	2,4	3,5	5,4
9	2,3	3,3	4,8
10	2,2	3,2	4,6
20	2,1	2,9	3,9
30	2,0	2,8	3,7
50	2,0	2,7	3,5
100	2,0	2,6	3,4
$\infty$	1,96	2,58	3,29

### 3. Fehler- und Ausgleichsrechnung

Bei Messwerten muss man grundsätzlich davon ausgehen, dass sie fehlerbehaftet sind, also nur mehr oder weniger gute Näherungswerte der zu bestimmenden Größe sind. Fehler können auch bei sorgfältiger Arbeit auftreten. Sie sind entweder systematischer Natur (z.B. falsche Einstellung technischer Parameter) oder haben zufällige Ursachen. Auch numerische Berechnungen z.B. mit einem Computer sind in der Regel nicht beliebig genau, sondern fehlerbehaftet, angefangen von z.B. der endlichen Tiefe jedes Iterationsverfahrens bis zu den unvermeidlichen Rundungsfehlern.

Um die Ursachen dieser Fehler insgesamt in den "Griff" zu bekommen, gibt es die verschiedensten Modellvorstellungen. In statistischen Modellen werden oft nicht überprüfbare Voraussetzungen gemacht, wie z.B. das Vorliegen einer bestimmten Verteilungsfunktion der Messwerte um den "wahren" Wert. Besonders gern setzt man eine „Gaußsche Normalverteilung“ voraus, obwohl diese nur selten streng realisiert ist. Deterministische Modelle werden ausführlich in der Numerischen Mathematik untersucht. Dabei interessiert in erster Linie die Fehlerfortpflanzung im Ablauf umfangreicher Rechenprozesse und die Beschreibung fehlerbehafteter Funktionen.

### 4. Fehlerfortpflanzung

Das beherrschende Prinzip in der Fehler- und Ausgleichsrechnung ist die Methode der kleinsten Quadrate. Die Grundgedanken gehen schon auf Gauß zurück, der diese Methode für die Geodäsie und die Berechnung von Planetenbahnen anhand von wenigen fehlerbehafteten Beobachtungswerten entwickelte und sehr erfolgreich einsetzte.

Selbst für den einfachsten Fall einer Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_N$  möchte man zur Charakterisierung der Messreihe einen "ausgeglichenen" Wert verwenden. Mit der durch

$$S(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \Rightarrow \text{Minimum}$$

eingeführten *Methode der kleinsten Quadrate* erhalten wir aus der Forderung  $\partial S / \partial \bar{x} = 0$  das Ergebnis

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

Der *bekannte arithmetische Mittelwert*  $\bar{x}$  ist also der gesuchte ausgeglichene Wert. Parallelen zur Statistik sind unverkennbar, obwohl hier deterministische Begründungen gegeben werden. Als *mittleren Fehler der Einzelmessung* führt man ein:

$$\Delta x_e = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

Der mittlere Fehler ist gleich der (empirischen) Standardabweichung  $\sigma$  einer Stichprobe, und der *Fehler des Mittelwertes*  $\bar{x}$  aus  $N$  Messungen ist wieder

$$\Delta x = \sigma / \sqrt{N} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

Das *Ergebnis einer Messung* oder Rechnung wird oft in der folgenden Form angegeben:

$$\bar{x} \pm \Delta x \text{ ("absoluter Fehler")} \quad \text{oder} \quad \bar{x} \pm \Delta x / \bar{x} \cdot 100\% \text{ ("relativer Fehler").}$$

Wichtig wird nun der Fall, dass aus Messreihen  $x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)}$  über  $k$  gemittelte fehlerbehaftete Werte  $\xi_n \pm \Delta\xi_n$  in weiteren Rechnungen benutzt werden sollen. Wir nehmen an, dass aus den einzelnen fehlerbehafteten Argumenten  $\xi_1, \dots, \xi_N$  ein Funktionswert  $f = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  bestimmt werden soll. Dann lässt sich zeigen:

Der Mittelwert von  $f$  ergibt sich durch Einsetzen der Mittelwerte der Messreihen, d.h.

$$\bar{f} = f(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_N)$$

und der mittlere Fehler einer einzelnen Bestimmung von  $f$  ist

$$\Delta f = \sqrt{(f_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_N) \Delta \xi_1)^2 + \dots + (f_{\xi_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) \Delta \xi_N)^2},$$

wobei diese Formel nur für "kleine" mittlere Fehler  $\Delta \xi_i$  gültig ist. ( $f_{\xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_N) \Delta \xi_i$  bedeutet die partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach ihrer  $i$ -ten Variablen  $\xi_i$ .)

Die Formel beruht auf einer Taylorentwicklung von  $f$ , in der alle Glieder ab der 2. Ordnung vernachlässigt werden. Man nennt diese Formel für  $\Delta f$  auch das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*.

Wenn für eine Größe  $\xi_n$  keine Messserie gegeben ist, sondern man 'nur' wissen möchte, wie sich kleine Änderungen  $d\xi_1, \dots, d\xi_N$  auf die Zielgröße  $f$  auswirken, dann liegt ebenfalls eine Aufgabe der Fehlerrechnung vor. Oft spricht man dann von *Störungsrechnung* oder *Sensitivitätsanalyse*. Eine einfache Lösung bietet auch hier die Taylorentwicklung nach linearen Gliedern, den **Größtfehler**:

$$df = f_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 + f_{\xi_2}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_2 + \dots + f_{\xi_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_N$$

Das wesentliche Problem bei vielen Aufgabenstellungen besteht aber darin, dass man die Funktion  $f$  nicht kennt. Möchte man z.B. ein lineares Gleichungssystem lösen, dann soll  $f$  die Abhängigkeit der Lösung von der Koeffizientenmatrix und den Koeffizienten der Inhomogenität ausdrücken. Wäre eine solche Funktion bekannt, könnte man nach obiger Taylorformel den Einfluss von Datenfehlern in den Koeffizienten auf die Lösung abschätzen.

## 5. Ausgleichsrechnung

Oft werden funktionale Zusammenhänge durch eine Menge von Beobachtungswerten beschrieben, und man möchte durch eine analytische Bildungsvorschrift diesen funktionalen Zusammenhang angeben. Insbesondere ist es bei vielen Beobachtungswerten Aufgabe der *Ausgleichsrechnung*, diesen Zusammenhang zu ermitteln. Dabei muss man von der konkreten Aufgabenstellung wissen, welche Funktionenklasse zur Beschreibung in Frage kommt.

Zur Lösung eines Ausgleichsproblems seien  $f(a, x)$  parameterabhängige Funktionen aus einer vorgegebenen Funktionenklasse. Dabei ist  $a = (a_1, \dots, a_M)^T$  ein noch zu bestimmender Parametervektor, der die spezielle Funktion festlegen soll. Weiter seien  $N$  Beobachtungen  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  gegeben. Die Differenz  $v_N(a) = f(a, x_N) - y_N$  beschreibt den einzelnen Beobachtungsfehler gegenüber dem angenommenen funktionalen Zusammenhang  $y = f(a, x)$ . Der unbekannte Parametervektor  $a$  soll nun so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler minimal wird. Wir fordern deshalb

$$S(a) = \sum_{n=1}^N (v_n(a))^2 = [v(a), v(a)] = v^T v \Rightarrow \text{Minimum},$$

wobei  $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  der zu  $v$  transponierte Vektor ist. Mit Hilfe dieser "Methode der kleinsten Quadrate" kann die Lösung allgemein bestimmt werden. Die Funktion  $S(a)$  wird nach den Parametern  $a_1, \dots, a_M$  differenziert:

$$\frac{\partial S(a)}{\partial a_m} = 2 \sum_{n=1}^N v_n(a) \frac{\partial v_n(a)}{\partial a_m} = 0 \quad \text{für } m \in (1, \dots, M)$$

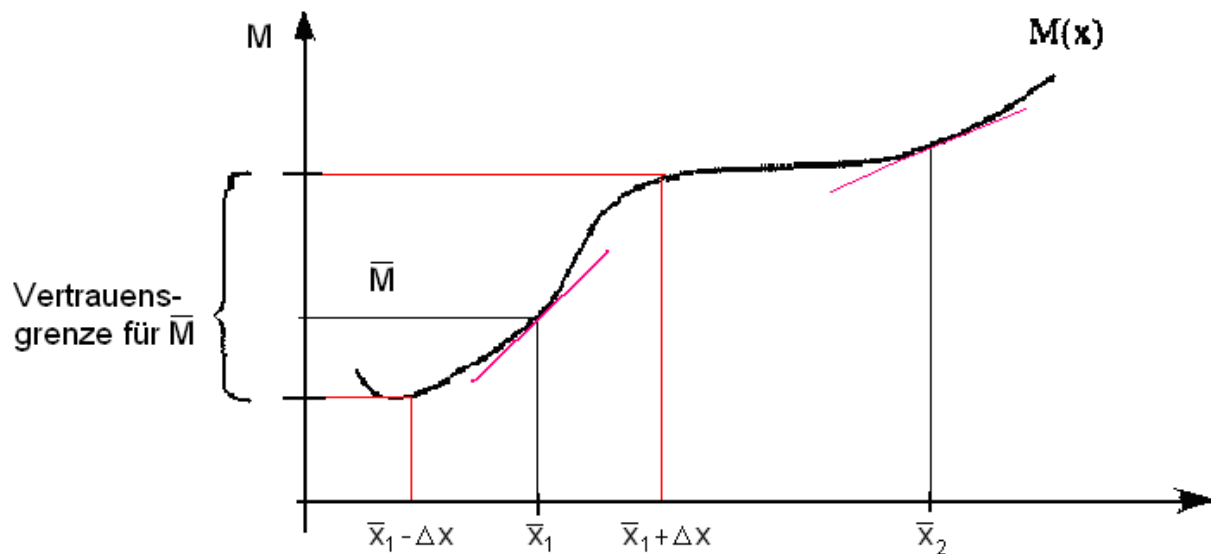
Dieses (im allgemeinen nichtlineare) Gleichungssystem lässt sich durch Linearisieren lösen (Gaußsche Normalgleichungen).

## 6. Beispiele

Häufig hängen Ergebnisse von mehreren Messwerten ( $x, y$ ) ab oder werden z.B. durch Funktionen berechnet, wie z.B.:

$$M = ax^2 + by + c \quad \text{oder} \\ M = A \cos x$$

Wie hängt dann  $\Delta M$  von  $\Delta x, \Delta y, \dots$  ab? Dazu betrachten wir ein Beispiel:



Für  $x_2$  ist  $\Delta M_2$  kleiner als  $\Delta M_1$  an der Stelle  $x_1$ .

Der Einfluss für kleine  $\Delta x$  lässt sich über die Steigung  $\partial M / \partial x$  berechnen. (Lineare Näherung, da  $\Delta M$  exakt so nur für Geraden zu berechnen ist.)

Man erhält allgemein für den absoluten **Größtfehler**

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial M}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (\text{vollständiges Differential})$$

Annahme: alle Fehler haben gleiches Vorzeichen (keine Kompensation)



Beispiele:  $M = ax^2 + by + c \Rightarrow \Delta M|_{x,y} = |2ax| \Delta x + |b| \Delta y$   
 $M = A \cos x \Rightarrow \Delta M = |-A \sin x| \Delta x$

Potenzprodukte:  $M = ax^n \cdot y^m$  Anwenden der Kettenregel:  
 $\Delta M = |anx^{n-1} \cdot y^m| \Delta x + |amx^n \cdot y^{m-1}| \Delta y$   
 $\Rightarrow \Delta M/M = n \cdot \Delta x/x + m \cdot \Delta y/y$

Die relativen Größtfehler bei Potenzprodukte addieren sich gewichtet mit den Potenzen.

Vorsicht! Dies gilt nicht bei Summen!!

$$M = ax^n + by^m$$

$$\Rightarrow \Delta M = |anx^{n-1}| \Delta x + |bm y^{m-1}| \Delta y$$

Spezialfall:  $n = m = 1 \quad \Delta M = |a| \Delta x + |b| \Delta y$

Gang der Fehlerrechnung:

1. Messgerätefehler (systematisch) ermitteln, abschätzen
2. Statistischen Fehler berechnen
3. Summation der Fehler
4. gegebenenfalls: Fehlerfortpflanzung

Beispiel: Messung der Größe T, Berechnung des statistischen Fehlers

n	$T_n/\text{sec}$	$(T_n - \bar{T})/\text{sec}$	$(T_n - \bar{T})^2/\text{sec}^2$
1	4,9	-0,08	$6,4 \cdot 10^{-3}$
2	5	0,02	$4,0 \cdot 10^{-4}$
3	4,8	-0,18	$3,2 \cdot 10^{-2}$
4	5,1	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$
5	5,1	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$

$$\Rightarrow \bar{T} = 4,98 \text{ sec} \quad \text{und} \quad \sigma = 0,13 \text{ sec}$$

$$\Delta T = \sigma/\sqrt{n} = 0,058 \text{ sec} \approx 0,07 \text{ sec} \quad \Rightarrow \Delta T/T = 0,013$$

relativer Fehler = 1,3%

**Ergebnis:  $T = (4,98 \pm 0,01) \text{ sec}$**

Man darf also erwarten, dass bestenfalls zwei von drei Einzelmessungen im Bereich zwischen 4,97 sec und 4,99 sec liegen, falls nur statistische Fehler auftreten.

Da n sehr klein ist, sollte man das Ergebnis mit Hilfe der Student-Verteilung korrigieren:

**Ergebnis:  $T = (4,98 \pm 0,03) \text{ sec}$  mit 95% Wahrscheinlichkeit.**

## Auswertung von Messkurven (hier: Geraden)

Die Messung ergibt einen funktionalen Zusammenhang  $f(x)$ , wobei  $x$  variiert

- Ziel:
- Bestätigung der Theorie, d.h. des funktionalen Zusammenhangs  $f(x)$
  - Ermittlung von physikalischen Größen aus dem Funktionsverlauf (z.B. aus der Steigung oder den Achsenschnittpunkten)

Dazu: Graphische Auftragung so, dass die Kurve  $f(x)$  möglichst zu einer Geraden wird (d.h. gegebenenfalls eine Koordinatentransformation durchführen).

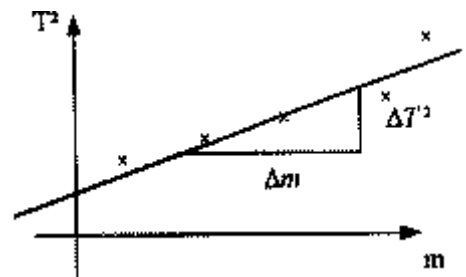
Beispiel Federpendel: Funktion für Schwingungszeit  $T$  ist

$$T^2(m) = 4\pi^2 (m_1 + m_2)/D$$

⇒  $T^2$  gegen  $m$  auftragen:  $f(m) = T^2(m) = a \cdot m + b$

$D$  aus Geradensteigung  $a$  ermitteln:

$$a = \Delta T^2 / \Delta m = d(T^2)/dm = 4\pi^2/D$$



Optimale Gerade?

Idee: kleinste Streuung der Messpunkte um diese Gerade

⇒ Summe der Abstandsquadrate sei minimal

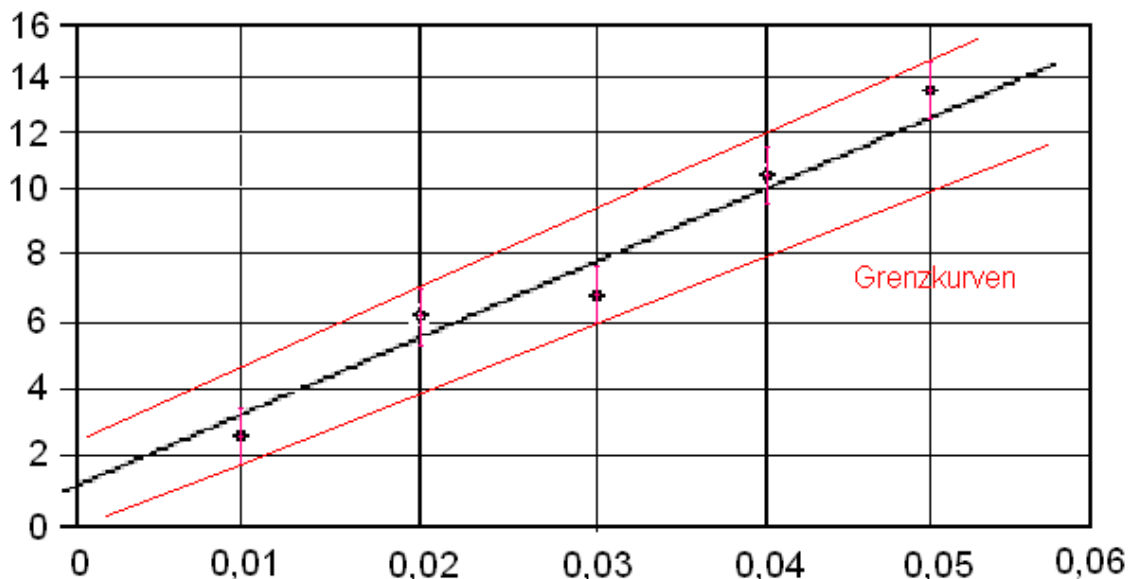
Anwendungsbeispiel: Schwingungsdauer eines Pendels

Wertepaare:

Masse (kg)	Schwingungszeitquadrat (s <sup>2</sup> )	
0	0	aus Zeichnung erkennbar
0,01	3,24	
0,02	6,25	
0,03	6,41	
0,04	10,24	
0,05	13,69	

a) per Augenmaß

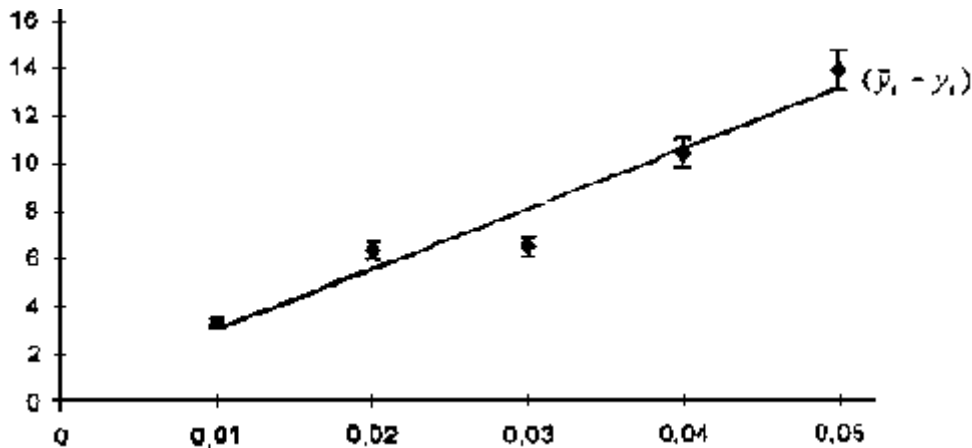
Fehler durch Eintragen der Fehlergrenzen ("Fehlerbalken") an den Messpunkten angeben. Extremalgeraden, welche die Fehlerfenster noch schneiden, liefern Fehlergrenzen.



b) Geradenausgleichsrechnung (Taylor: Fehleranalyse)  
 Literatur: z.B. Zurmühl: Praktische Mathematik, Springer-Verlag

Aufgabe: Suche optimale Ausgleichsgerade  $y(x) = ax + b$   
 für die Messwerte  $y_1(x_1), \dots, y_i(x_i)$

Methode: Die Minimierung der Summe der quadratischen Abweichungen



$Q = \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i)^2$  ist zu minimieren mit der "Ausgleichsgeraden"  $\bar{y}_i = \bar{y}(x_i) = ax_i + b$ .

Wenn man die Unbekannten  $a$  und  $b$  bestimmt hat, ist die Aufgabe gelöst.  
 Notwendige Bedingung ist (Extremwertaufgabe mit Minimum für  $a$  und  $b$ ):

$$dQ = 0 = \sum_{i=1}^N 2(\bar{y}_i - y_i) \cdot d\bar{y}_i = 2 \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i) \cdot (\partial \bar{y}_i / \partial a \cdot da + \partial \bar{y}_i / \partial b \cdot db)$$

Da  $a$  und  $b$  unabhängige Variablen sind, müssen im Minimum gleichzeitig die partiellen Ableitungen nach  $a$  und  $b$  Null werden, d.h.  $\partial Q / \partial b = 0$  und  $\partial Q / \partial a = 0$  sein.

Wegen  $\partial \bar{y}_i / \partial b = \partial (x_i \cdot a + b) / \partial b = 1$  und  $\partial \bar{y}_i / \partial a = \partial (x_i \cdot a + b) / \partial a = x_i$  folgt:

$$\partial Q / \partial b = 2 \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i) = 0$$

$$\partial Q / \partial a = 2 \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i) \cdot x_i = 0$$

Einsetzen der Geradengleichung für  $\bar{y}_i$  :

$$2 \sum_i (ax_i + b - y_i) = 0 \quad a[x] + b = [y]$$

$$2 \sum_i (ax_i + b - y_i) x_i = 0 \quad a[xx] + b[x] = [xy]$$

Wir verwenden die übliche *Gaußsche Summennotation*:

$$[x] = \sum_{i=1}^N x_i, \quad [y] = \sum_{i=1}^N y_i \quad \text{und} \quad [xy] = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Lösen des Gleichungssystems, d.h. Bestimmen von a und b, z.B. mit dem Determinantenverfahren:

$$a = D_a/D_m \quad \text{und} \quad b = D_b/D_m \quad \text{wobei}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} N & [x] \\ [x] & [xx] \end{vmatrix} = N[xx] - [x][x] \quad D_a = \begin{vmatrix} N & [y] \\ [x] & [xy] \end{vmatrix} \quad D_b = \begin{vmatrix} [x] & [y] \\ [xx] & [xy] \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = (N[xy] - [x][y]) / (N[xx] - [x]^2) \quad b = ([y][xx] - [x][xy]) / (N[xx] - [x]^2)$$

Zur Übung:

Zahlenbeispiel für Schwingungsdauer des Federpendels:  $T^2 = (4\pi^2/D) \cdot (m + m_F/3)$   
(D ist die Federkonstante, m die angehängte Masse,  $m_F$  die Federmasse  $\ll m$ )

$$T^2 = y = a \cdot x + b$$

y/sec <sup>2</sup>	x/kg		
3,24	0,01	[x] =	0,15 kg
6,25	0,02	[y] =	41,83 sec <sup>2</sup>
8,41	0,03	[xx] =	5,510 <sup>-3</sup> kg <sup>2</sup> $\Rightarrow$ a, b
10,24	0,04	[xy] =	1,5038 kg sec <sup>2</sup>
13,69	0,05	[yy] =	412,5619 sec <sup>4</sup>

Wie lautet die Extremwertaufgabe für  $T^2 = y = ax$  (d.h. Ursprungsgerade mit  $b = 0$ )?

## Leitfaden für das Praktikum

In der Regel besteht ein Versuchsprotokoll aus:

1. Messprotokoll (am Versuchstag vom Hilfsassistenten abzeichnen lassen)
2. Tabelle
  - der Messwerte mit ihren Einheiten und
  - Angabe/Abschätzung der Messfehler.
3. Angabe der physikalischen Formeln, nach denen die Auswertung erfolgt.  
Die verwendeten Größen sollen Sie durch Angabe des Namens und der Einheit erklären.
4. Auswertung: Rechengang mit ausführlichen, nachvollziehbaren Zwischenrechnungen unter Mitnahme der Einheiten der vorkommenden Größen.
5. Fehlerrechnung: statistischer Fehler, Größtfehler oder Fehlerabschätzung.
6. Angabe des Ergebnisses in der Form: **(..... ± .....) Einheit**; Stellen sinnvoll runden!
7. Vergleich mit Literaturwerten. Dies ergibt erst nach der Fehlerrechnung einen Sinn!
8. Fehlerdiskussion: Statistische oder systematische Fehler? Ursachen.

## 7. Weiterführende Literatur zur Fehlerrechnung

1. D. Geschke: Physikalisches Praktikum, B.G. Teubner, Stuttgart - Leipzig  
11. Auflage, 1998, Kapitel 1.3 – 1.8
2. R. Zurmühl  
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.  
Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York
3. Lothar Sachs (Standardwerk für die Statistik)  
Angewandte Statistik - Statistische Methoden und Ihre Anwendungen  
Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York
4. Martin Hengst  
Einführung in die Mathematische Statistik und ihre Anwendung  
BI Hochschultaschenbücher Band 42
5. Klaus Voss und Herbert Süße  
Praktische Bildverarbeitung (Kapitel 4)  
Hansa Studienbücher der Informatik, Carl Hanser Verlag München-Wien
6. Günter Gottschalk und Rudolf E. Kaiser  
Einführung in die Varianzanalyse und Ringversuche  
BI Hochschultaschenbücher Band 775  
(speziell Zusammenstellung von Testmethoden)

## B. Die Versuche

### 1. Versuch Stoß, Beschleunigung, harmonische Schwingung

Lernziel: 1. Anwendung der Gültigkeit von Impuls- und Energieerhaltungssatz  
2. Beschreibung beschleunigter Bewegungen  
3. Beschreibung von dynamischen Bewegungsabläufen mittels der Bewegungsgleichungen

Versuchsziele:

1. Prüfung der Gültigkeit der Erhaltungssätze
2. Messung von Beschleunigungen, Erdbeschleunigung  $g$
3. Bestimmung der Federkonstante einer Feder

#### Zu 1.) Erhaltungssätze

Impulserhaltungssatz: Die Summe der Impulse ist konstant, wenn keine äußeren Kräfte auf ein System einwirken.

Definition Impuls :  $\vec{p} = m\vec{v}$

$m$ : Masse  $\vec{v}$ : Geschwindigkeit

Zusammenhang von  $\vec{v}$  mit der Kraft  $\vec{F}$  :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \text{falls } m = \text{konst. } \vec{F} = m\vec{v} = m\vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(allgemein gilt bei  $m \neq \text{konst.}$

z.B. für Raketen)

Falls keine Kraft auf das System wirkt:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$$

Für Stöße zweier Körper gilt:

Summe der Impulse vor dem Stoß = Summe der Impulse nach dem Stoß

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad \rightarrow \quad m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) \quad (*)$$

Energieerhaltungssatz: In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Energien konstant.

a) Beim *elastischen Stoß* zweier Massen  $m_1$  und  $m_2$  gilt

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}'_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}'_2^2 \quad \rightarrow \quad m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)(\vec{v}_2 + \vec{v}'_2) \quad (**)$$

Aus (\*) und (\*\*) folgt bei *zentralem Stoß* (lineares Problem, die Vektoren dürfen durch Skalare - mit Vorzeichen für die Bewegungsrichtung - ersetzt werden.)

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$v_1$  bzw.  $v_2$  in den Impulssatz einsetzen:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Spezialfall:  $m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = v_2, v_2' = v_1$

b) *Vollkommen inelastischer, zentraler Stoß*

⇒ Beide Körper „kleben“ nach dem Stoß aneinander:

$$\Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Sonderfälle:

Für  $m_1 = m_2 = m$ :  $v' = \frac{v_1 + v_2}{2}$

und wenn  $v_1 = 0$ :  $v' = \frac{v_2}{2}$

Energiebilanz:

$$E_{\text{vorher}} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$E_{\text{nachher}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{v_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{v_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} m v_2^2 = \frac{1}{2} E_{\text{vorher}}$$

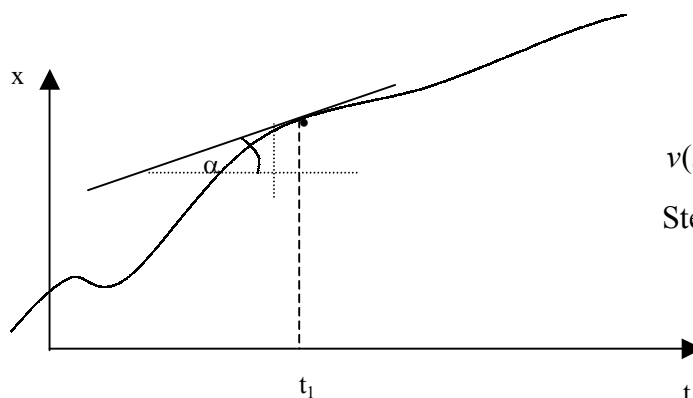
$$\Delta E = \frac{1}{4} m v_2^2 \text{ geht durch plastische Verformung verloren.}$$

Alle Zwischenzustände elast. ... inelastisch sind möglich:  $0 < \Delta E < \frac{1}{4} m v_2^2$

Der Energieerhaltungssatz hilft da nicht weiter, da  $\Delta E$  nicht bekannt ist. Man braucht ihn zum Glück aber auch nicht für die Auswertung, denn das System ist bereits durch den Impulserhaltungssatz voll bestimmt.

## zu 2.) Schiefe Ebene

Definitionen: (Momentan-)Geschwindigkeit:  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}}$



$$v(t_1) = |v(t_1)| = \tan \alpha = \frac{dx(t_1)}{dt}$$

Steigung der Weg-Zeit-Kurve

*Beschleunigung:* Änderung der Geschwindigkeit im Zeitintervall dt:

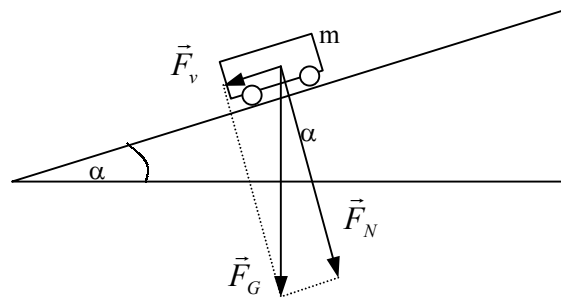
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}$$

*Newton: actio = reactio*

Einwirkende Kraft = Trägheitskraft  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

⇒ **Grundgleichung der Mechanik:**  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m\vec{a}$

Beispiel: Wagen mit der Masse  $m$  auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel  $\alpha$



Gravitationskraft  $\vec{F}_G = m\vec{g}$

Kräftezerlegung:  $F_g$  in Vortriebskraft  $F_v$  (Hangabtriebskraft) und Normalkraft  $F_N$

$$F_v = F_g \sin\alpha = mg \sin\alpha$$

$$F_N = F_g \cos\alpha = mg \cos\alpha$$

$$\text{Newton: } mg \sin\alpha = ma$$

$$a = \frac{F_v}{m} = g \sin\alpha = \text{const.}$$

$$v = \int_0^t a dt = at + v_0 = \frac{F_v}{m}t + v_0 = g \sin\alpha t + v_0$$

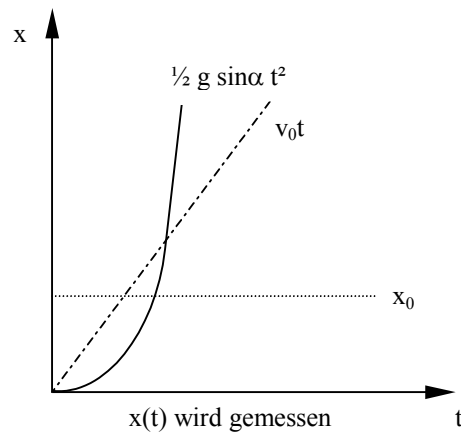
$$x = \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2 + v_0 t + x_0$$

Steigung von  $v(t)$ :

$$s_v = g \sin\alpha = a$$

Im Praktikumsversuch wird die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmt:

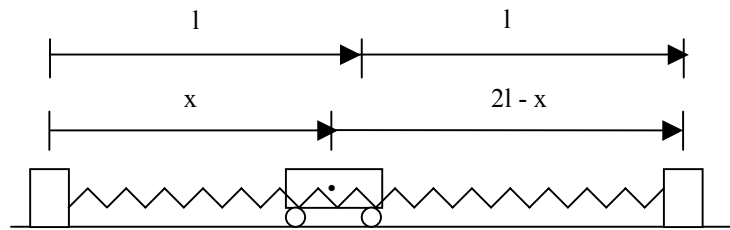
$$g = a/\sin\alpha$$



a: Rechnerisch: 2 mal  $x(t)$  numerisch ableiten



### Zu 3.) Lineare harmonische Schwingungen



Die entspannte Feder hat die Länge  $l_0$ .

Federkraft *einer* Feder:  $\vec{F} = -D\Delta\vec{x} = -D(\vec{x} - \vec{l}_0)$  (lineare Abhängigkeit, „Federwaage“)

Kraft der linken Feder:  $F_l = -D(x - l_0)$  „Hookesches Gesetz“

Kraft der rechten Feder:  $F_r = -D(x - 2l + l_0)$

Frage: Wie bewegt sich ein Wagen mit der Masse  $m$  zwischen zwei Federn?

Bewegung linear  $\rightarrow$  skalare Darstellung: Trägheitskraft = Rückstellkraft der Feder

Lösung mit Hilfe der Newtonschen Grundgleichung:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= m\ddot{x}(t) \\ \Rightarrow ma &= -D(x - l_0) - D(x - 2l + l_0) \\ &= -D(x + x - 2l) = -2D(x - l) \end{aligned}$$

Wir führen neue Koordinaten  $\psi$  (= Auslenkung aus der Mittenposition) ein:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= x(t) - l \\ \Rightarrow m\ddot{\psi}(t) &= -2D\psi(t) \\ \Rightarrow \ddot{\psi} + \frac{2D}{m}\psi &= 0 \end{aligned}$$

Linearer Oszillator,  
Schwingungsgleichung

lineare homogene Differentialgleichung

Lösungsansatz:  $\psi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t \\ \ddot{\psi}(t) &= -\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t = -\omega^2 \psi \end{aligned}$$

Einsetzen:  $-\omega^2 \psi + \frac{2D}{m}\psi = 0$

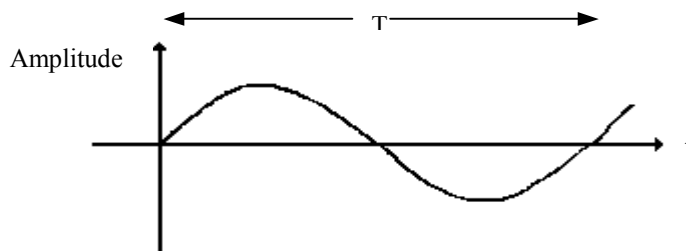
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2D}{m}$$

Mit  $\omega^2 = \frac{2D}{m}$  ist der obige Ansatz eine richtige Lösung!

Beachte: Geschwindigkeit  $\dot{\Psi}$  und Beschleunigung  $\ddot{\Psi}$  sind zeitabhängige Größen!  
Verlauf sinusförmig!

Bedeutung der „Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ “:

- $\omega t$ : Phasenwinkel
- nach einer Periode  $T$  ist der Phasenwinkel  $2\pi$
- $\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

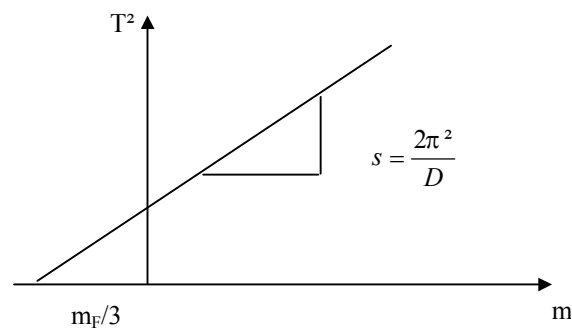


$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2D}} \quad (\text{bei einer Feder: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}})$$

Periode

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{2D} \Rightarrow$$

Auswertung:  $T^2(m)$  auftragen  
 $\Rightarrow$  lineare Darstellung



Der Schnittpunkt mit der Massen-Achse liegt nicht bei  $m = 0$ , sondern bei etwa  $m = m_F/3$  (wobei  $m_F$  die Masse der Feder ist), weil die kinetische Energie der Feder noch berücksichtigt werden muß.

Die Konstanten  $A$  und  $B$  in der Lösung der Bewegungsgleichung sind durch die *Anfangsbedingungen* bestimmt (der Ansatz gilt für alle  $t$ , also auch für  $t = 0$ ):

$$\psi(t=0) = B$$

$$\dot{\psi}(t=0) = \omega A \Rightarrow \text{Amplitude } A = \frac{\dot{\psi}(t=0)}{\omega} = \frac{v(t=0)}{\omega}$$

## 2. Versuch Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

- Ziel: - mathematische Beschreibung gedämpfter und erzwungener Schwingungen  
 - Bestimmung einer Dämpfungskonstanten  
 - Ausmessen einer Resonanzkurve

### 1. Gedämpfte Schwingung

Annahme: Dämpfung ~ Geschwindigkeit  $\vec{F}_R = -\gamma \vec{\dot{x}}$   
 (z.B. durch Luftwiderstand, Lagerreibung, gewollte Dämpfung –  
 im Versuch: Wirbelstrombremse)

$$ma = F_i = F_R + F_{Feder} \quad \text{Newtonsche Grundgleichung}$$

Lineares Problem:  $\Rightarrow m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - Dx$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

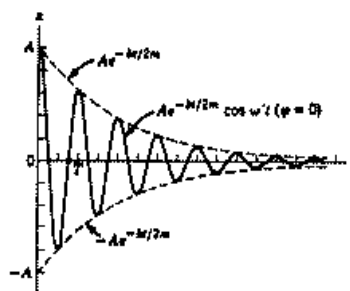
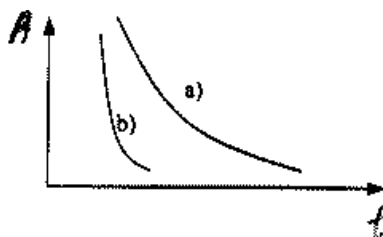
Mit  $\frac{\gamma}{m} := 2\delta$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$   $\delta$  „Dämpfung“

Ansatz:  $x(t) = ae^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = a\lambda e^{\lambda t}$  und  $\ddot{x}(t) = a\lambda^2 e^{\lambda t}$  einsetzen:  
 $\Rightarrow a\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta a\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 a e^{\lambda t} = 0$   
 $\Rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$   
 $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Lösung:  $x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$

Fallunterscheidung:

- a)  $\delta^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1,2}$  reell und  $< 0$ , exponentiell abfallende Amplitude: „Kriechfall“  
 b)  $\delta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ , exponentieller Abfall, „Aperiodischer Grenzfall“  
 (wichtig für Zeigermessinstrumente, Waagen)



$$x = a \cdot e^{-\gamma/2m t} = \cos \omega' t + \varphi$$

$$\text{mit } \omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{[(D/m) - (\gamma/2m)^2]}$$

Abb. 13.19 Zeitlicher Verlauf der Amplitude bei einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Amplitude nimmt exponentiell von  $A$  auf Null ab.

c)  $\delta^2 < \omega_0^2$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega < \omega_0}$$

wobei  $i^2 = -1$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Wie sieht die Lösung aus?

Bestimmung der Anfangsbedingungen z.B.:

Lösung für  $x(t=0) = x_0 \Rightarrow a_1 + a_2 = x_0$   
 $\dot{x}(t=0) = 0$   
 $\Rightarrow \dot{x}(t) = -\delta e^{-\delta t} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) + e^{-\delta t} (ia_1 \omega e^{i\omega t} - ia_2 \omega e^{-i\omega t})$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -\delta (a_1 + a_2) + ia_1 \omega - ia_2 \omega = 0$$

$$(i\omega - \delta) a_1 - (i\omega + \delta) a_2 = 0$$

$$a_1 - \frac{i\omega + \delta}{i\omega - \delta} a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = x_0$$

$$a_2 + \frac{i\omega + \delta}{i\omega - \delta} a_2 = x_0 \Rightarrow \left( \frac{i\omega - \delta + i\omega + \delta}{i\omega - \delta} \right) a_2 = x_0$$

$$a_2 = \frac{x_0 (i\omega - \delta)}{2i\omega}$$

$$a_1 = \frac{x_0 (\delta + i\omega)}{2i\omega}$$

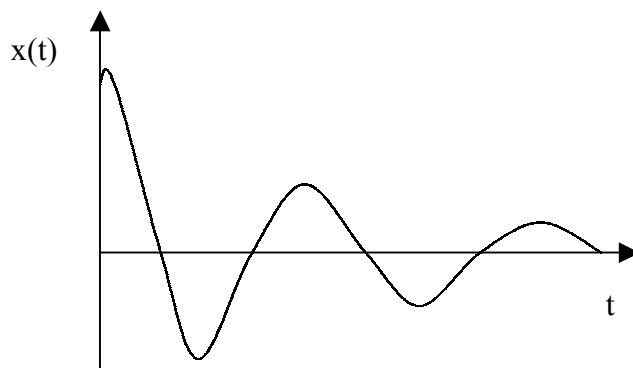
$$x(t) = e^{-\delta t} \left( \frac{x_0 (i\omega + \delta)}{2i\omega} e^{i\omega t} + \frac{x_0 (i\omega - \delta)}{2i\omega} e^{-i\omega t} \right) \quad \text{mit } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{wird}$$

$$x(t) = x_0 \frac{e^{-\delta t}}{2i\omega} \left( (i\omega + \delta) \cos \omega t + (-\omega + i\delta) \sin \omega t + (i\omega - \delta) \cos \omega t - (-\omega - i\delta) \sin \omega t \right)$$

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} < \omega_0$$

Amplitudendämpfung

Frequenz ist kleiner als im ungedämpften, harmonischen Fall



## Ermittlung des Dämpfungsdekrementes D; verwandte Kenngrößen

Wegen  $\cos \omega(t+T) = \cos \omega t$   
 $\sin \omega(t+T) = \sin \omega t$

folgt aus dem Ansatz für die Schwingungsgleichung:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

und für der nächsten Schwingung  
 nach der Zeit einer Periode T :

$$x(t+T) = x_0 e^{-\delta(t+T)} \left( \cos \omega(t+T) + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega(t+T) \right)$$

$\Lambda$  = "logarithmisches Dämpfungsdekrement"

D = „Dämpfungsdekrement“

In der Zeit  $t = 1/\delta$  fällt die Amplitude auf  $1/e$ .

$$T = 2\pi/\omega$$

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} = D$$

$$\Lambda = \ln D = \delta T$$

$$\delta = \frac{\ln D}{T}$$

Im Praktikumsversuch wird D aus dem  
 Amplitudenverhältnis  $x(t)/x(t+T)$  zweier  
 aufeinander folgender Schwingung ermittelt.

## 2. Erzwungene Schwingung

Eine zusätzlich äußere Kraft  $F(t)$  soll wirken:

$$m\ddot{x} = -Dx - \gamma\dot{x} + F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

$F(t)$  sei periodisch (z.B. Vibrationen  $\neq$  Eigenfrequenz; Maschinen, Wechselstromkreis),

d.h. 
$$F(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} \quad (\text{oder } F_0 = \sin \Omega t)$$

Newtonscher Grundgleichung: 
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Physikalische Vorüberlegung:

1. Das System wird nach einer Einschwingzeit ebenfalls mit  $\Omega$ , der Erregerfrequenz, mitschwingen.
2. Eine Phasendifferenz Erreger  $\leftrightarrow$  schwingende Masse  $m$  ist möglich.

$\Rightarrow$  Ansatz I (reell):

Erzwungene Schwingung: 
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

Phasenverschiebung zulassen: Masse  $m$  bleibt um den Winkel  $\varphi$  hinter  $F(t)$  zurück:

$$x = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A\Omega \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow -A\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) + 2\delta A\Omega \cos(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

Additionstheoreme anwenden: 
$$\begin{aligned} \sin(\Omega t + \varphi) &= \sin \Omega t \cos \varphi + \cos \Omega t \sin \varphi \\ \cos(\Omega t + \varphi) &= \cos \Omega t \cos \varphi - \sin \Omega t \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\delta\Omega \sin \varphi \right) A \sin \Omega t + \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\delta\Omega \cos \varphi \right) A \cos \Omega t = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad (*)$$

Die Gleichung (\*) gilt für alle Zeiten t, also auch für Zeiten, die für die Berechnung günstig sind, z.B für die  $\sin \Omega t$  bzw.  $\cos \Omega t$  Null werden.

Einsetzen von günstig gewählten Anfangs- oder Randbedingungen:

a. Für  $t=0 \Rightarrow \sin \Omega t = 0$  und  $\cos \Omega t = 1 \Rightarrow$   $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

b. Mit:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

und  $t = \pi/(2\Omega) \Rightarrow \sin \Omega t = 0$  wird

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta \Omega)^2}}$$

$\Rightarrow$  Ansatz II (komplex):

$x(t) = A_0 e^{i(\Omega t - \varphi)}$  Masse m bleibt um den Winkel  $\varphi$  hinter  $F(t)$  zurück.

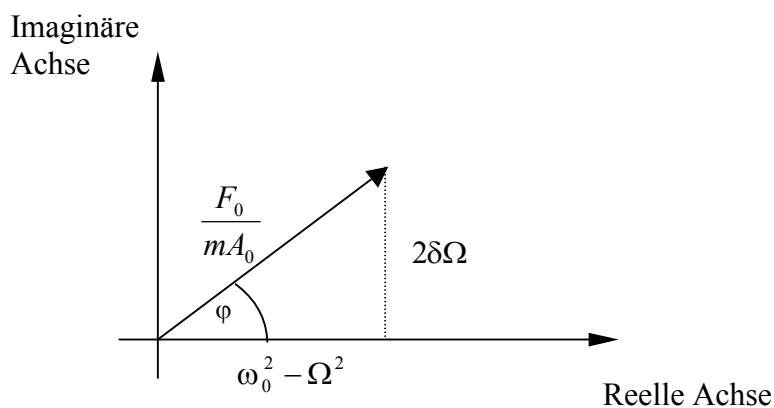
Einsetzen in Bewegungsgleichung liefert

$$-A_0 \Omega^2 e^{i(\Omega t - \varphi)} + 2\delta A_0 i \Omega e^{i(\Omega t - \varphi)} + \omega_0^2 A_0 e^{i(\Omega t - \varphi)} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 + 2\delta i \Omega + \omega_0^2 = \frac{F_0}{mA_0} e^{i\varphi}$$

Betrachte die Darstellung der Gleichung in der Gaußschen Zahlenebene:

(Zerlegung in die reellen und imaginären Komponenten, ähnlich wie Sie es für Vektoren bereits kennen; „Zeigerdiagramm“ bei Wechselstrom, Trafo)



Aus dem Zeigerdiagramm folgt das selbe Ergebnis wie oben:

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Vollständige Lösung  $x(t) = A_0 e^{i(\Omega t - \varphi)}$  + Lösung der homogenen DGL  
(wie bei gedämpfter Schwingung)

Einschwingvorgang

Die Amplitude nimmt nicht mit der Zeit ab, obwohl eine dämpfende Kraft wirkt.

Wie ist der Verlauf der Amplitude  $A_0(\Omega)$  als Funktion der Erregerfrequenz  $\Omega$ ?

- a)  $\Omega = 0 \quad \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$   
 b)  $\Omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow A_0 \rightarrow 0$   
 c)  $\Omega \rightarrow \omega_0, \delta = 0 \quad \Rightarrow A_0 \rightarrow \infty$

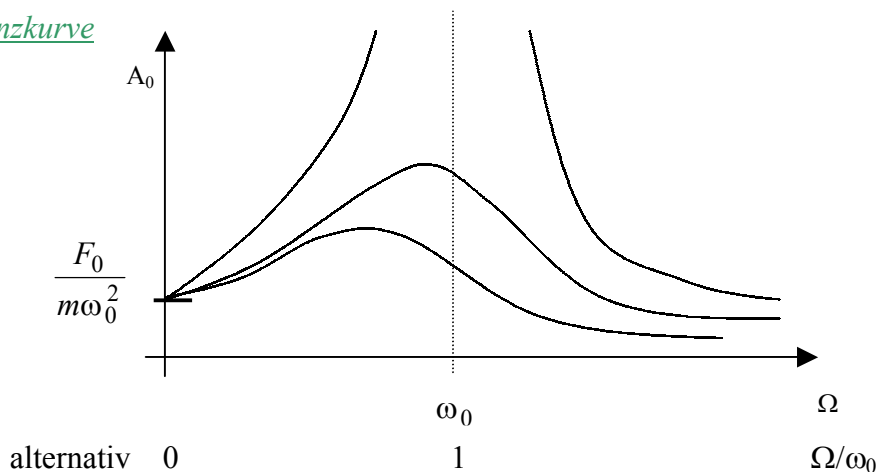
Wo liegt das Maximum der „Resonanzkurve“?

$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{\frac{F_0}{m} (-2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot 2\Omega + 8\delta^2 \Omega)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{für } \frac{dA}{d\Omega} = 0 \xrightarrow[\Omega \neq \infty]{\Omega \neq 0} 2\delta^2 - \omega_0^2 + \Omega_R^2 = 0$$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Resonanzkurve



Amplitudenresonanz: Resonanzkatastrophe

A erreicht im Resonanzfall nicht  $\infty$ , da Reibungsverluste auftreten und das Hooksche Gesetz nicht mehr gilt, wenn die Elastizitätsgrenze überschritten wird. D.h. diese Annahmen in der Grundgleichung sind dann nicht mehr erfüllt.

Die Phasenverschiebung erhält man durch Einsetzen in  $\tan\varphi = 2 \delta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$ .

Wir betrachten die Sonderfälle, um den Verlauf abzuschätzen.

a)  $\Omega = \omega_0$  (nicht bei  $\omega_R$ )

$$\tan\varphi = \infty$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

b)  $\Omega \rightarrow \infty$

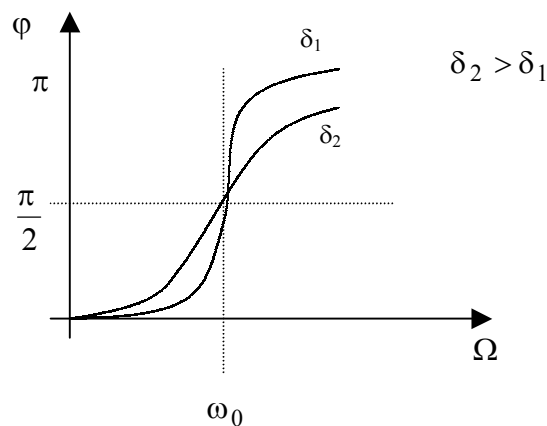
$$\tan\varphi \rightarrow -0$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi$$

c)  $\Omega = 0$

$$\tan\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$



### 3. Charakterisierung eines Resonanzkreises

1. Definition der *Resonanzüberhöhung* aus Energieüberlegungen:

$$Q_R := \frac{2\pi \cdot \text{vorhandene Energie}}{\text{die in einer Periode verlorene Energie}} = \frac{2\pi E}{T \frac{dE}{dt}} = \frac{\omega E}{\frac{dE}{dt}}$$

Vorhandene Energie:  $E = \frac{1}{2} D x_{\max}^2 = \frac{1}{2} D A^2$  (potentielle Energie; für  $x_{\max}$  ist  $E_{\text{kin}} = 0$ )  
(gedämpfte Schwingung)

$$A \sim e^{-\delta t} \Rightarrow \text{da } E \sim A^2 \text{ ist, nimmt } E \text{ also ab mit } E = E_0 (e^{-\delta t})^2 = E_0 e^{-2\delta t}$$

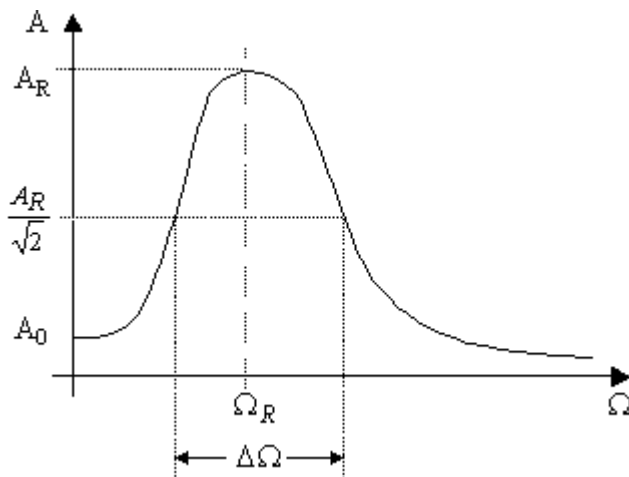
$$\frac{dE}{dt} = -2\delta E_0 e^{-2\delta t} = -2\delta E$$

$$\Rightarrow Q_R = \frac{\omega}{2\delta} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\text{Hinweis: Elektrotechnik})$$

↑  
schwache Dämpfung



2. Definition des Gütefaktors einer Schwingung mittels der Resonanzkurve  $Q = \Omega_R / \Delta\Omega$



$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega} \quad (2. \text{ Definition}) \\
 &= \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}}{\Delta\Omega} \\
 &\approx \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}}{2\delta} \\
 &\approx \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (1. \text{ Definition})
 \end{aligned}$$

Für kleine Dämpfungen ist die „Bandbreite“  $\Delta\Omega \approx 2\delta$ .  
 Dann sind Resonanzüberhöhung und Gütefaktor ungefähr gleich groß.

Warum ist  $\Delta\Omega$  ausgezeichnet?

$E \sim A^2$ , bei  $\frac{A_R}{\sqrt{2}}$  also ist die Hälfte der Energie im Vergleich zu  $A_R$  gespeichert.

4. Bestimmung des Gütefaktors Q im Praktikumsversuch für drei Dämpfungen

a.  $Q_R$  aus  $\delta$  (Amplitudenabnahme (Dämpfung) und der Periodendauer) und  $\omega_0$  :

$$\delta = \ln D / T = \ln (A_i / A_{i+1}) / T$$

$\omega_0$  = Maximumstelle der Resonanzkurve

aus 1. Definition  $\Rightarrow Q_R \approx \omega_0 / 2\delta$

b. Graphische Bestimmung von  $\Omega_R$  und  $\Delta\Omega$  aus der experimentell ermittelten Resonanzkurve.

Aus 2. Definition  $\Rightarrow Q = \Omega_R / \Delta\Omega$ .

c. Vergleich der Gütefaktoren  $Q_R$  und  $Q$  nach beiden Definitionen für die verschiedenen Dämpfungen.

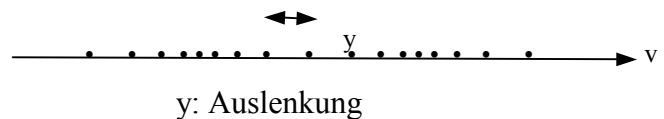
### 3. Versuch Die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern – Wellen

Eine Welle ist ein zeitlich und räumlich veränderlicher Erregungszustand.  
 Harmonische Welle: sinusförmige Erregung (Auslenkung, Feld)

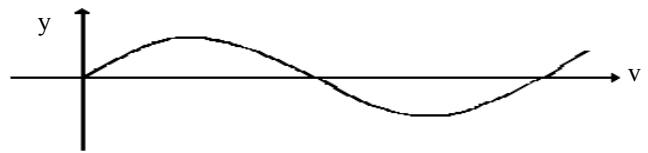
#### 1. Charakterisierung von Wellen

Nach der Richtung der Auslenkung unterscheidet man:

- a) longitudinale Wellen  
 Auslenkung  $y \parallel$  Ausbreitungsrichtung  $v$   
 z.B. Schallwellen  
 Rückstellkraft z.B. durch Druckunterschiede



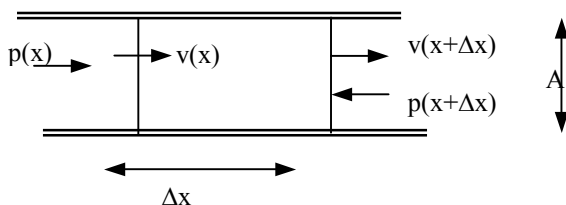
- b) transversale Wellen  
 Schwingung  $y \perp$  Ausbreitungsrichtung  $v$   
 z.B. Seilwellen, Saiten, Lichtwellen,  
 Oberflächenwellen  
 Rückstellkraft: z.B. elastische Verformung,  
 Gravitation (Ozeanwellen)  
 Können *linear polarisiert* sein: Die Auslenkung erfolgt dann in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.



#### 2. Funktionale Beschreibung der Auslenkung

Beispiel: Schallwelle in einem gasgefüllten Rohr

Ziel: Bewegungsgleichung  $y = y(x, t)$



Auslenkung  $y$  als Funktion von  
 Ort  $x$  und Zeit  $t$  entlang der  
 Ausbreitungsrichtung  $x$   
 Volumenänderung  $\Delta V$   
 Fläche  $A = \text{const}$   
 Dichte  $\rho = \text{const}$   
 Adiabatisch ( $dQ = 0$ )

Auf ein Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \cdot A$  wirkt die Trägheitskraft  $F_i$ :

$$F_i = m \cdot a = \rho \cdot \Delta V \cdot a = \rho \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{dv}{dt}$$

und die Rückstellkraft  $F_p$  infolge der Druckdifferenz:

$$F_p = (p_1 - p_2) \cdot A \quad \text{oder in linearer Näherung für kleine Schritte } \Delta x$$

$$F_p = -\frac{dp}{dx} \Delta x \cdot A$$

Gleichsetzen der Kräfte nach *actio = reactio* (Newton) gibt:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (*)$$

Die Grenzflächen des Volumens  $\Delta V$  bewegen sich unterschiedlich  
 $\Rightarrow$  Kompression  $dV/V$  des Gases:

$$\frac{dV}{V} = \frac{A \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \Delta x \cdot dt}{A \cdot \Delta x} = \frac{dv}{dx} dt$$

Man führt den Kompressionsmodul  $\kappa$  (oder die Kompressibilität  $\kappa$ ) durch folgende Definition ein:

$$dp = -\frac{1}{\kappa} \frac{dV}{V} \quad \text{damit wird} \quad dp = -1/\kappa \cdot dv/dx \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\kappa} \frac{dv}{dx} \quad (**)$$

(\*) nach t und (\*\*) nach x abgeleitet, gibt

$$(*)' \quad \frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2p}{dtdx}$$

$$(**)' \quad \frac{d^2p}{dtdx} = -\frac{1}{\kappa} \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{d^2v}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{d^2v}{dx^2}}}$$

Die Schallschnelle  $v$  geht durch Integration nach t in die Auslenkung  $y$  über.

**allgemeine Wellengleichung**  $\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$

**mit der Schallgeschwindigkeit**  $c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}}$

(Eine häufige Schreibweise für Wellen ist:

$$\ddot{\Psi} = c_{phase}^2 \cdot \Delta \Psi$$

Dabei ist

$c_{phase}$  die "Phasengeschwindigkeit"

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{der (Laplacesche) Deltaoperator.}$$

Wir betrachten zwei Fälle für ein ideales Gas: (mit Definition:  $dp/dV = 1/\kappa \cdot 1/V$ )

1. eine langsame Zustandsänderung, die isotherm abläuft:

$$pV = nRT = \text{const.}, \quad p = nRT/V \quad (\text{ideale Gasgleichung})$$

$$\frac{dp}{dV} = -nRT \frac{1}{V^2} = -\frac{p}{V}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{1}{p}$$

2. einen schnellen Prozeß, der ohne Wärmeaustausch (adiabatisch) abläuft.

Dies trifft im allgemeinen auf Schallwellen zu:

$$p = \text{const} / V^\gamma \quad \text{mit } \gamma = c_p / c_v \quad (\text{Adiabatengleichung})$$

$$\frac{dp}{dV} \sim -\gamma \cdot V^{-\gamma-1} \sim -\gamma \cdot (V^{-\gamma}) \cdot V^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dV} \sim -\gamma \cdot \frac{p}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\gamma \cdot p} \quad \text{und} \quad c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}}$$

In einem Metallstab gilt bei kleinen Auslenkungen, d.h. im elastischen Bereich,

das Hookesche Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \Delta l / l \approx E \cdot \Delta V / V = 1/\kappa \cdot \Delta V / V$$

Somit beträgt die Schallgeschwindigkeit einer (Longitudinal-)Welle im Metallstab

$$c = \sqrt{E / \rho}$$

Wegen der Symmetrie der Wellengleichung in  $x$  und  $t$  muß die Lösung eine Funktion

$$y = f(x \pm c \cdot t) \quad \text{sein, die periodisch in } (x \pm ct) \text{ ist.}$$

$$\text{D.h. für } x' - ct' = x'' - ct'' \quad \Rightarrow \quad \text{gleiche Auslenkung } y' = y''$$

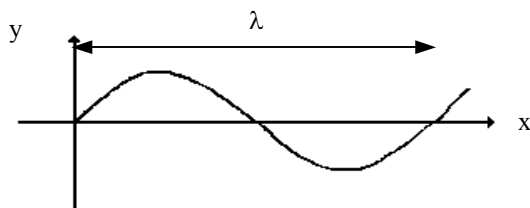
In  $t' - t''$  ist der Zustand von  $x'$  nach  $x''$  gewandert (Phase).

$$\Rightarrow c = \frac{x' - x''}{t' - t''} \quad \text{„Phasengeschwindigkeit“}$$

Lösungsansatz für Harmonische Wellen (bestätigen durch Einsetzen in die Wellengleichung):

$$y = y_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct \mp x) + \varphi_0 \right] = y_0 \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda}; \omega, \varphi_0 \text{ s.o.}$$

$$(\text{oder alternativ: } y = y_0 \cdot e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)})$$



„Laufende Welle“, d.h.  $E_{\text{pot}}$  und  $E_{\text{kin}}$  sind gleichzeitig vorhanden.

Der Zustand der Auslenkung läuft in  $x$ -Richtung.

Richtungskonvention:

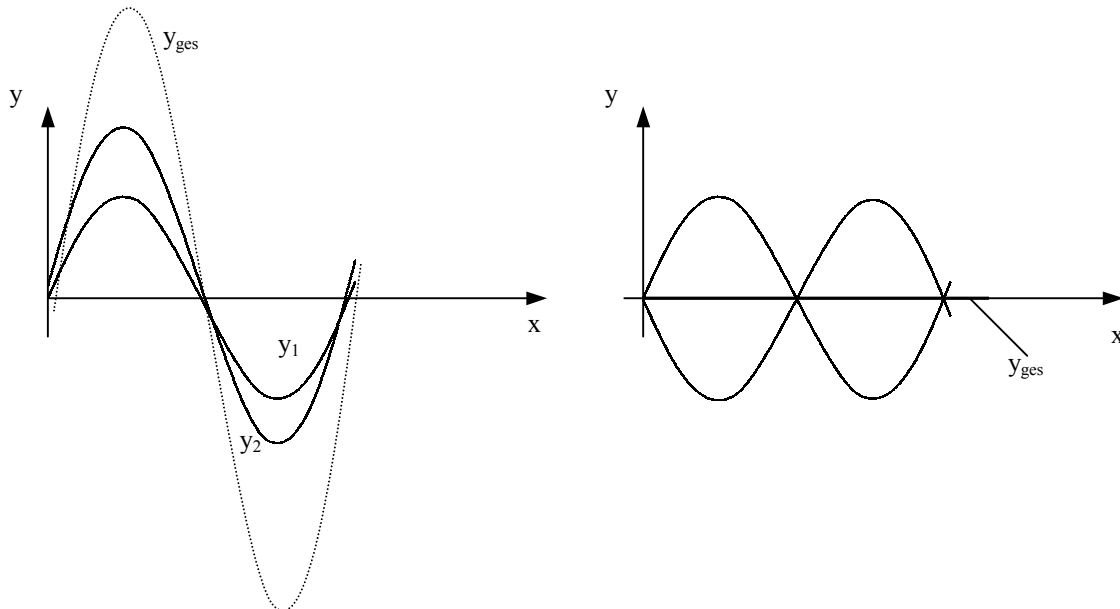
-  $kx$ : positive  $x$ -Richtung

+  $kx$ : negative  $x$ -Richtung

### 3. Überlagerung von Wellen

Voraussetzung: Mechanische Wellen, kleine Auslenkung, so dass lineares Kraftgesetz gilt

$$\text{Kräfteaddition} \rightarrow \text{Amplituden addieren sich} \Rightarrow \vec{y}_{ges} = \sum_i \vec{y}_i$$



*Entgegenlaufende Wellen* (z.B. nach Reflexion):

$$y_1 = y_0 \sin(\omega t - kx)$$

o.B.d.A.: die Reflexion erfolge bei  $x = 0$   
mit Phasensprung  $\varphi_0$

$$y_2 = y_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

$$y_1 + y_2 = \dots$$

a)  $y_{ges}$  ? Bei Reflexion an fester Wand ist  $\varphi_0 = \pi$

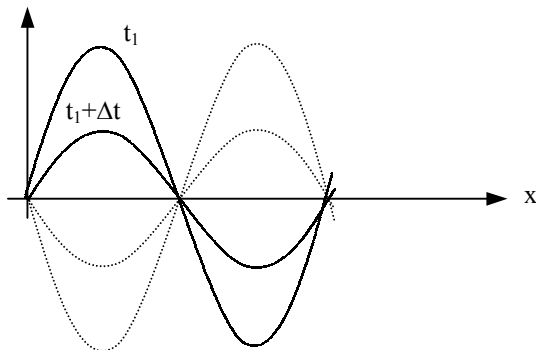
Anwendung der Additionstheoreme [ $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)/2$ ]:

$$\implies y_{ges} = y_1 + y_2 = -2y_0 \cos \omega t \sin kx$$

b) Bei Reflexion am losen Ende ist  $\varphi_0 = 0$

$$y_{ges} = y_1 + y_2 = 2y_0 \sin \omega t \cos kx$$

Interpretation: Ortsfeste Bäuche, Nullstellen, Phasen („*Stehende Welle*“)

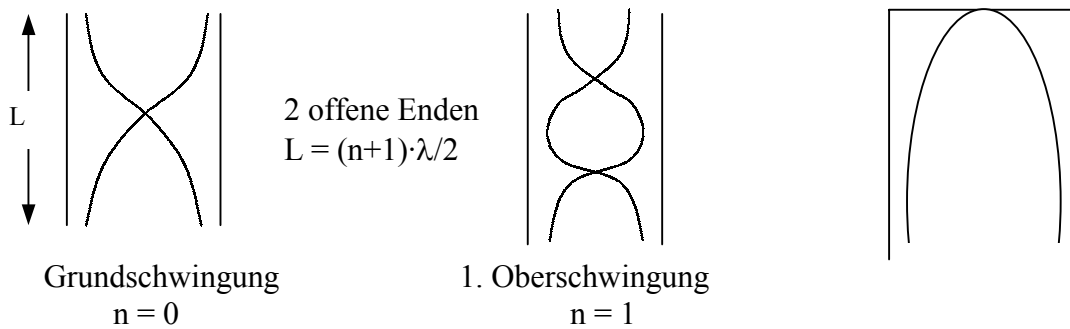


Energieumwandlung:  $E_{pot} \leftrightarrow E_{kin}$

Wichtig: endliche Medien, Resonanzbedingungen (z.B. Saite von Musikinstrumenten)

c) Wenn die Frequenzen leicht voneinander abweichen ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ), entstehen *Schwebungen*.

#### 4. Stehende Wellen in Röhren, Stäben



Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft von der Temperatur

$$c = 331 \sqrt{1 + \alpha t} \frac{m}{s} \quad \text{mit } \alpha = 1/273,15 \text{ } ^\circ\text{C} \quad c = 343 \text{ m/s bei } 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

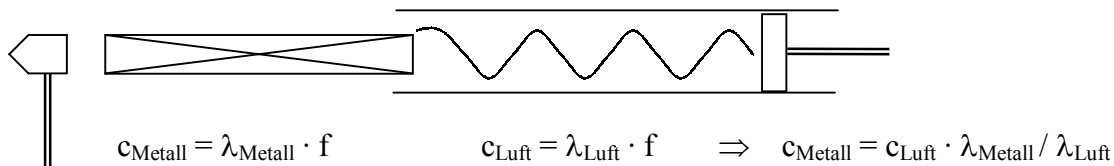
#### 5. Versuch „Kundtsches Rohr“

Aufgabe: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{met}}$  von Stahl und Messing

Die Luft im Glasrohr wird vom Stab mit seiner „Eigen“frequenz  $f$  zum Schwingen angeregt. Die Welle im Glasrohr ist in Resonanz, wenn die Staubfiguren maximal sichtbar sind.

Resonanzbedingung: stehende Welle bei „passender“ Resonatorlänge,  
Schwingungsbauch (??) am Stab (Anregung)  
Schwingungsknoten am Stempel (Reflexion am festen Ende)

Hammerschlag erzeugt „Geräusch“  
Stab wirkt als scharfes Frequenzfilter  
Anpassung der Luftmolekül- an die Stabamplitude  
Mit dem Stempel wird das Glasrohr auf Resonanzlänge abgeglichen.



Die stehenden Schallwellen im Stab und im Rohr haben *die selbe* Frequenz  $f$ .

Bekannt ist  $c_{\text{Luft}}$ , ferner die Dichte  $\rho$  des Stabmaterials.

Man ermittelt  $\lambda_{\text{Luft}}$  aus der gemessenen Periode der Staubfiguren.

$\Rightarrow$  Schallgeschwindigkeit im Metallstab  $c_{\text{Metall}} = c_{\text{Luft}} \cdot \lambda_{\text{Metall}} / \lambda_{\text{Luft}}$

Elastizitätsmodul  $E = (c_{\text{Metall}} \cdot \rho)^2$  des Stabmaterials.

Den Größtfehler erhalten wir durch partielles Ableiten von  $c_{\text{Metall}}$ :

$$\begin{aligned} \Delta c_{\text{Metall}} &= \left| \frac{\partial c_{\text{Metall}}}{\partial c_{\text{Luft}}} \Delta c_{\text{Luft}} \right| + \left| \frac{\partial c_{\text{Metall}}}{\partial \lambda_{\text{Metall}}} \Delta \lambda_{\text{Metall}} \right| + \left| \frac{\partial c_{\text{Metall}}}{\partial \lambda_{\text{Luft}}} \Delta \lambda_{\text{Luft}} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_{\text{Metall}}}{\lambda_{\text{Luft}}} \Delta c_{\text{Luft}} \right| + \left| \frac{c_{\text{Luft}}}{\lambda_{\text{Luft}}} \Delta \lambda_{\text{Metall}} \right| + \left| \frac{c_{\text{Luft}} \cdot \lambda_{\text{Metall}}}{\lambda_{\text{Luft}}^2} \Delta \lambda_{\text{Luft}} \right| \end{aligned}$$

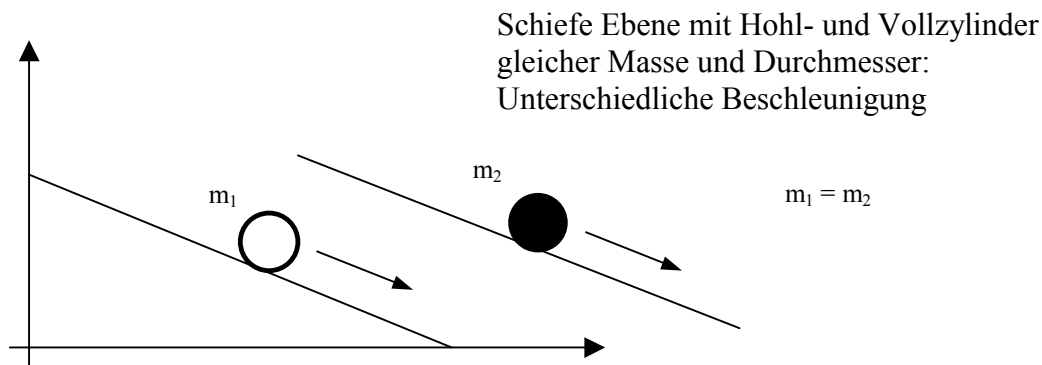
## 4. Versuch Drehbewegungen und das Trägheitsmoment J

Lernziel: Drehbewegungen beschreiben, Trägheitsmomente berechnen

### 1. Das Trägheitsmoment

a) Warum benötigt die Rotation eine eigene Beschreibung?

Experiment:



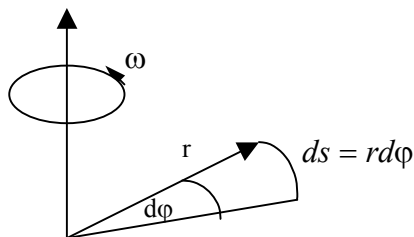
Energiebetrachtung:  $W_{\text{gesamt}} = W_{\text{pot}} + (W_{\text{kin}} + W_{\text{rot}})$

$$\text{für } |v| = \text{const. ist } W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (*)$$

Man definiert die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} := \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$$\text{für } |v| = \text{const. ist } \omega = 2\pi/T$$

Berechnung von  $\omega$  aus dem im Zeitintervall  $dt$  zurückgelegten Winkelement  $d\varphi$  und dem Bogenelement  $ds$ :



$$\frac{ds}{dt} = v = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad (**)$$

$$r = \text{const} \quad \vec{\omega} \perp \vec{r}$$

$$(\text{allg.: } \vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega})$$

Aus (\*) und (\*\*) folgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 = W_{\text{rot}}$$

Man definiert in Analogie zur linearen Bewegung für die Drehbewegung das Massenträgheitsmoment eines Punktes als  $J = m r^2$

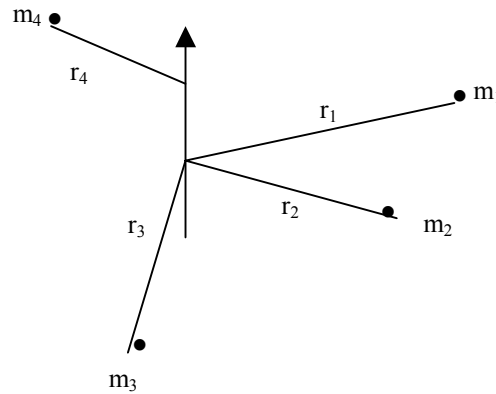
b) Berechnung von J

1 Massenpunkt:  $J = mr^2$

n-Massepunkte:  $J = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i$

Kontinuierliche Massenverteilung  
(z.B. Vollmaterial) durch Grenzübergang

$n \rightarrow \infty \quad \Delta m_i \rightarrow 0$



**allgemeine Definition des Trägheitsmoments:**  $J = \int_M r^2 dm$

J ist von der Masse m und der Form eines Körpers abhängig

z.B.: Berechnung von J einer Scheibe (mit M: Gesamtmasse, R: Radius, h: Höhe)

$$J = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \rho \int_V r^2 dV$$

wenn  $\rho \neq \rho(r)$

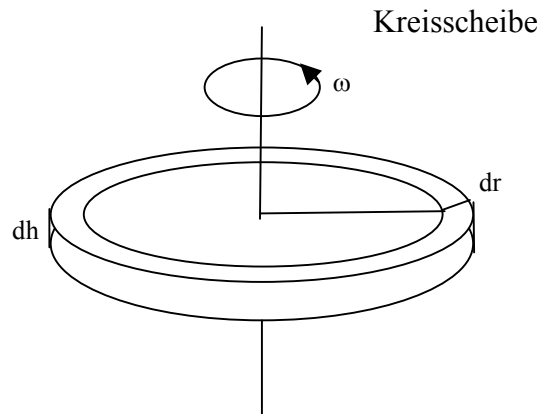
Betrachte dünnen Ring, Radius r, Dicke dr, Höhe h.

Da Abstand von der Drehachse konstant:

$$dJ = dm r^2 = \rho dV r^2 = \rho \underbrace{2\pi r}_{dA} \cdot \underbrace{dr}_{dm} \cdot hr^2$$

$dA$   
 $dm$

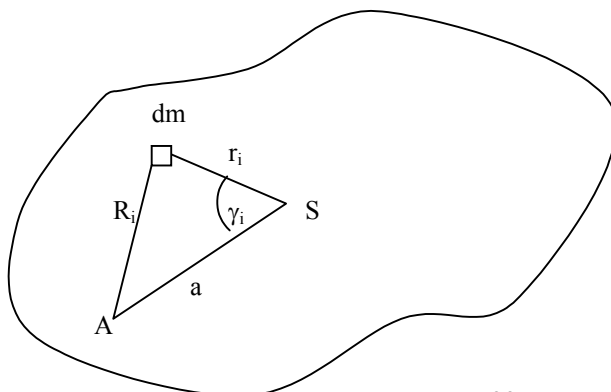
$$J_S = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{1}{4} R^4 - 0 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\rho \pi R^2 h}_M \cdot R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$



Hier: Drehachse geht durch Schwerpunkt S der Scheibe:

$$\text{Schwerpunkt } \bar{x}_S := \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\int \bar{x} dm}{\int dm}$$

Frage: Wie berechnet man J, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt geht?





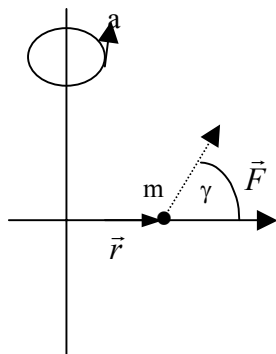
$$\begin{aligned}
J &= \int_M \vec{R}_i^2 dm_i = \int (\vec{a} + \vec{r}_i)^2 \cdot dm_i = \int (\vec{a}^2 + \vec{r}_i^2 \pm 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{r}_i) \cdot dm_i && \text{Cosinus-Satz} \\
& && \text{in vektorieller Schreibweise} \\
&= \vec{a}^2 \int dm_i + \int \vec{r}_i^2 \cdot dm_i \pm 2\vec{a} \int \vec{r}_i \cdot dm_i \\
& && \underbrace{\hspace{10em}} \\
& && = 0, \text{ da } \int \vec{r}_i \cdot dm_i = 0 \text{ nach Definition f\u00fcr den Schwerpunkt}
\end{aligned}$$

$$\boxed{J = Ma^2 + J_S} \quad \text{„Satz von Steiner“}$$

Rotiert ein K\u00f6rper um eine zur Schwerpunktsachse parallele Achse, so ist sein Massentr\u00e4gheitsmoment um das Tr\u00e4gheitsmoment ( $Ma^2$ ) gr\u00f6\u00dfer, das der Schwerpunkt des K\u00f6rpers bei Rotation um die neue Achse (im Abstand  $a$ ) hat.

## 2. Die Bewegungsgleichung f\u00fcr die Rotation - Experimentelle Bestimmung von J

Gedankenexperiment: Ein K\u00f6rper (hier: Massenpunkt mit starrer Verbindung zur Drehachse) wird in eine Drehbewegung versetzt.



Um die Masse  $m$  in eine Drehbewegung um die Achse  $\omega$  zu versetzen, ben\u00f6tigt man:

- eine Kraft  $\underline{F}$ , die
- in einem Abstand  $\underline{r}$  ( $\neq 0$ ) von der Drehachse und unter
- dem Winkel  $\alpha$  ( $\neq 0$ )

am System angreift.

Die Beschleunigung  $\underline{a}$  tangential zur Kreisbahn ist:

$$\underline{a} \sim \underline{r} \quad \text{und} \quad \underline{a} \sim \underline{F}_{\text{effektiv}} = \underline{F} \sin \gamma$$

Das f\u00fchrt zur Einf\u00fchrung einer beschleunigenden Gr\u00f6\u00dfe (in Analogie zur Kraft):

$$\text{Drehmoment } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad |M| = |r| \cdot |F| \cdot \sin \gamma$$

Die Gesetze der Drehbewegungen k\u00f6nnen \u00fcber Analogien zur Translation aufgestellt werden.

## Analogietabelle

Name		Einheit		Einheit	Name
Ort	$\vec{r}$		$\vec{\varphi}$		Winkel
Geschwindigkeit	$\vec{v} = d\vec{r} / dt$		$\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt$		Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a} = d^2\vec{r} / dt^2$		$\vec{\alpha} = d^2\vec{\varphi} / dt^2$		Winkelbeschleunigung
Masse	m		$J = \int r^2 dm$ <small style="margin-left: 100px;">M</small>		Massenträgheitsmoment
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$		$\vec{L} = J\vec{\omega}$		Drehimpuls
Kraft	$\vec{F} = m\vec{a}$		$\vec{M} = J\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$		Drehmoment
Arbeit	$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}$		$W = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi}$		Arbeit
Translationsenergie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$		$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$		Rotationsenergie
Arbeit	$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}$		$W = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi}$		Arbeit
Leistung	$P = \vec{F} \vec{v}$		$P = \vec{M} \vec{\omega}$		Leistung

Übungsaufgabe: Tragen Sie die Einheiten zu den Größen ein.

- Kennzeichnung von Vektoren:
- durch Fettdruck  $\mathbf{v}$
  - durch darüber gesetzten Pfeil  $\vec{v}$
  - durch Frakturschrift (alte deutsche Schrift)  $\mathfrak{v}$
  - durch Unterstreichen  $\underline{v}$

Ersetze die physikalischen Größen in den Gesetzen für die Translationsbewegungen durch die analogen Größen für die Rotation, um die entsprechenden Gleichung für die Rotationsbewegung zu erhalten.

Beispiele:

a) Bewegungsenergie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

b) Newtonsche Grundgleichung der Mechanik:

Trägheitskraft  $\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = J\vec{\alpha}$

Mit der Definition für das Drehmoment folgt: ( $\alpha$  = Winkelbeschleunigung)

$$\text{actio} \quad \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} \quad \text{reactio}$$

(von außen angreifende Kraft = Trägheitskraft)

### 3. Praktikumsaufgabe

Experimentelle Bestimmung von J einer Scheibe aus der Bewegungsgleichung  $\vec{M} = J\vec{\alpha}$

Problem: Messung von  $\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \frac{\vec{M}}{J}$

Einfacher ist: Drehwinkel  $\varphi_{\text{exp}}(\mathbf{t})$  messen und  $\varphi(\mathbf{t})$  rechnerisch aus der Bewegungsgleichung bestimmen. Dann  $\varphi_{\text{exp}}(\mathbf{t})$  einsetzen und nach J auflösen.

$$\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \frac{\vec{M}}{J}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \int_1^2 \frac{\vec{M}}{J} dt = \frac{\vec{M}}{J}t + \vec{c}_1$$

$$\Rightarrow \text{Zweite Integration:}$$
$$\vec{\varphi} = \int_1^2 \left[ \frac{\vec{M}}{J}t + \vec{c}_1 \right] dt = \frac{1}{2} \frac{\vec{M}}{J} t^2 + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2$$

Welche Bedeutung haben  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$ ?

$$\text{Durch Einsetzen von } t = 0: \frac{d\vec{\varphi}}{dt}(t = 0) = \vec{c}_1$$

$$\vec{\varphi}(t = 0) = \vec{c}_2$$

$\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  werden durch den Zustand des Systems bei  $t = 0$  festgelegt (Bezeichnung: **Anfangsbedingungen**).

Im Versuch gilt:  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = 0$ . (Der Körper ist beim Start in Ruhe.)

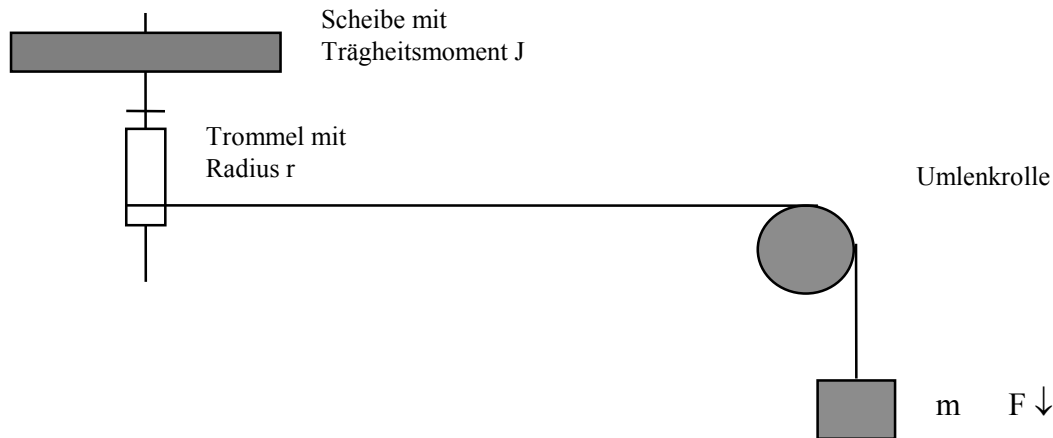
$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \left| \vec{M} \right| \frac{t^2}{\varphi}$$

Zum einfacheren Ablesen werden ganze Umdrehungen gemessen:

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \left| \vec{M} \right| \frac{t_n^2}{2\pi n} \quad n: \text{Anzahl der Umdrehungen}$$

Wie groß ist  $\mathbf{M}$  im Versuchsaufbau?

Im Versuch wird eine Scheibe drehbar um eine feste Achse gelagert. Unterhalb der Scheibe befindet sich eine Trommel mit Radius  $r$ , auf der ein Faden aufgewickelt wurde. Der Faden wird durch eine drehbare Rolle nach unten abgelenkt. Die am Faden hängende Masse  $m$  wird durch die Gravitationskraft nach unten beschleunigt und versetzt dadurch die Scheibe in eine Drehbewegung.



Hier:  $|M| = |r| \cdot |F|$  (der Faden greift tangential zur Trommel an  $\Rightarrow \alpha = 90^\circ$ )  
 $= rm(g - a)$  (g: Erdbeschleunigung, a: resultierende Beschleunigung von m, wenn mit der Scheibe verbunden.  
 Das Gewicht fällt nicht frei, also ist  $a < g$ .)

Abschätzung für a (dabei wird a als konstant angenommen):

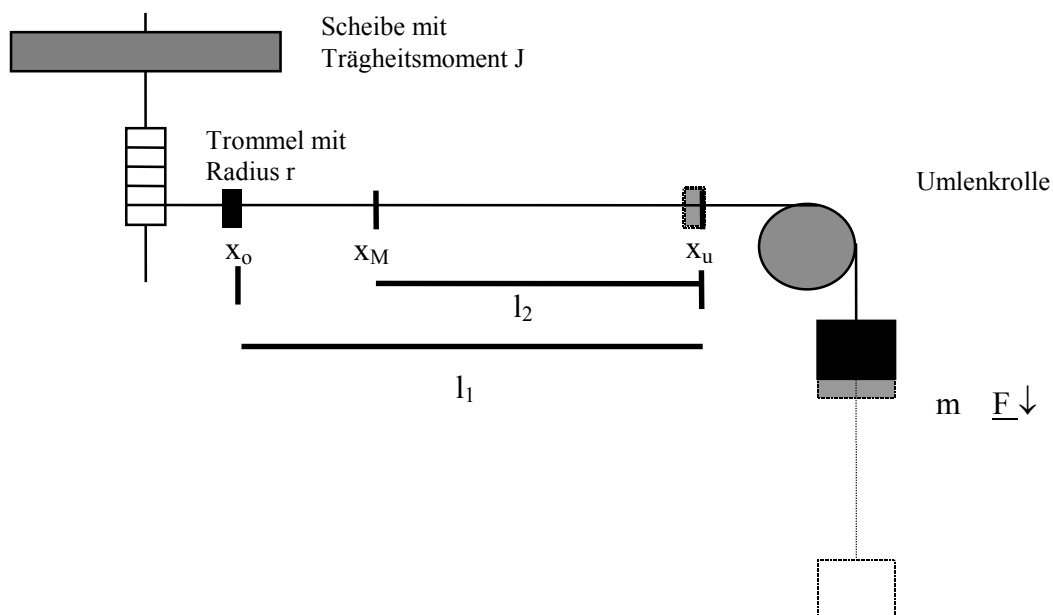
Die Masse m legt die Laufstrecke s ohne Scheibe in der Zeit  $t_1$  zurück, mit Scheibe in  $t_2$ . Daraus folgt:

$$s = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}at_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{a} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \approx \frac{20^2}{0,2^2} = 10000 \text{ (im Versuch).}$$

Also ist im Vergleich zu den Messfehlern die Abnahme der Zugkraft infolge der Bewegung von m vernachlässigbar.

#### 4. Versuchsdurchführung

Der Faden wickelt sich bei der Beschleunigung ab. Eine Markierung läuft von  $x_0$  nach  $x_u$ , der zurückgelegte Weg ist  $l_1$ . Der Drehkörper dreht sich weiter und wickelt den Faden wieder auf. Die Markierung läuft dann wieder bis  $x_M$ . Der zurückgelegte Weg beim Hochlaufen ist  $l_2$ . Die Wege sind nicht gleich wegen der Reibung. Die Differenz ist:  $\Delta l = l_1 - l_2$ .



Der Energieverlust beträgt

$$\Delta W_{\text{pot}} = m g (l_1 - l_2) = W_{\text{reibung}} = \int F_{\text{Reibung}} ds$$

Bei der Abschätzung der Reibungsverluste nehmen wir an, dass die Reibung konstant ist:

$$W_R \approx F_R (l_1 + l_2)$$

$$\Rightarrow mg(l_1 - l_2) = F_R(l_1 + l_2)$$

$$\Rightarrow F_R = mg \frac{(l_1 - l_2)}{(l_1 + l_2)}$$

Für  $a \ll g$  :

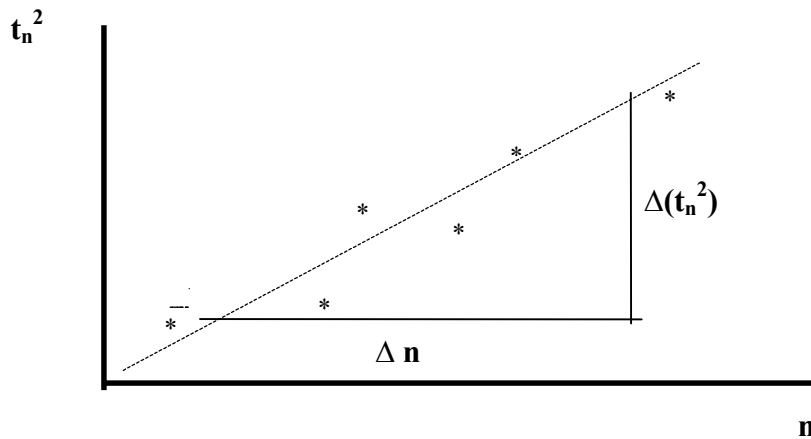
$$F_{\text{rot}} = mg - F_R = mg - mg \frac{(l_1 - l_2)}{(l_1 + l_2)} = mg \cdot \frac{(l_1 + l_2) - (l_1 - l_2)}{(l_1 + l_2)}$$

$$F_{\text{rot}} = mg \cdot \frac{2l_2}{(l_1 + l_2)}$$

### 5. Auswertung

$$J = \frac{1}{2} M \frac{t_n^2}{2\pi n} = \frac{1}{4} r F_{\text{rot}} \frac{t_n^2}{\pi n} \quad \Rightarrow \quad t_n^2 = 4\pi \frac{J}{r F_{\text{rot}}} \cdot n \quad (\text{r ist der Trommelradius})$$

Die Steigung wird aus der linear aufgetragenen Messkurve  $t_n^2 = t_n^2 (n)$  ermittelt:  
(wie die bekannte Geradengleichung  $y = mx$ )



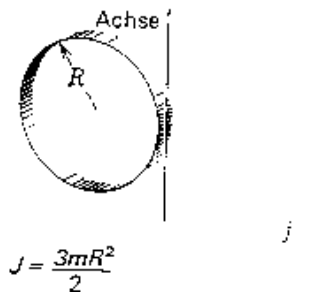
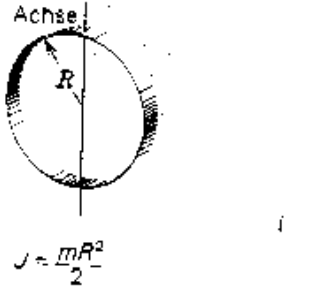
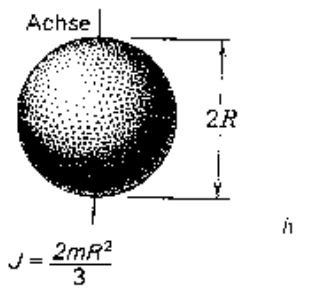
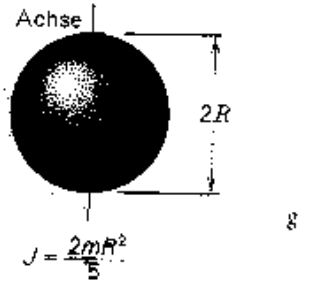
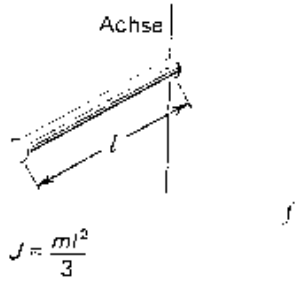
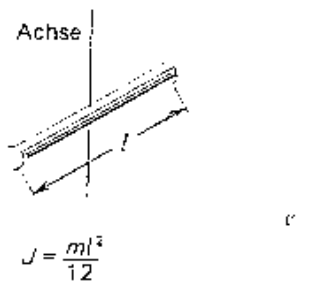
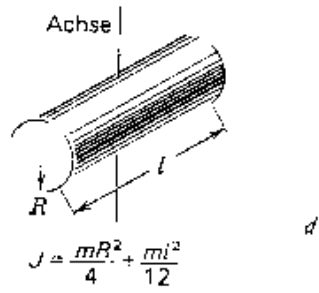
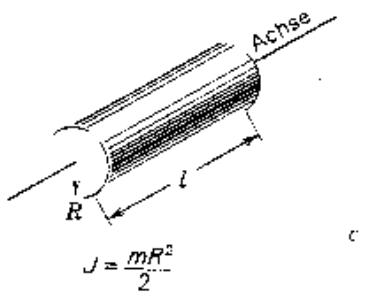
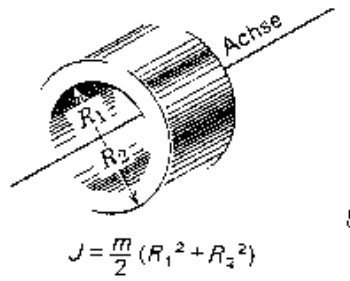
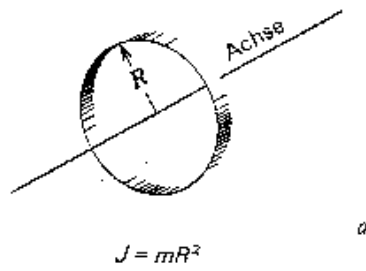
Steigung:  $s = \frac{\Delta(t_n^2)}{\Delta n} = 4\pi \frac{J}{r F_{\text{rot}}}$

$$s = \Delta(t_n^2) / \Delta n = 4\pi J / r F_{\text{rot}}$$

$$\Rightarrow J = sr \frac{F_{\text{rot}}}{4\pi}$$

## 6. Die Trägheitsmomente einiger regelmäßiger Körper

### Trägheitsmomente einiger regelmäßiger Körper



- (a) Reifen um die Zylinderachse.
- (b) Hohlzylinder um die Zylinderachse,
- (c) Vollzylinder um die Zylinderachse.
- (d) Vollzylinder (oder Scheibe) um einen Durchmesser durch die Zylindermitte,
- (e) dünner Stab um eine zum Stab senkrechte Achse durch den Mittelpunkt.
- (f) dünner Stab um eine zum Stab senkrechte Achse durch ein Ende.
- (g) Vollkugel um einen Durchmesser,
- (h) dünnwandige Hohlkugel um einen Durchmesser
- (i) Reifen um einen Durchmesser,
- (j) Reifen um eine Tangente an den Reifen.

siehe H.J. Paus

## 5. Versuch Die spezifische Wärme und die Verdampfungswärme von Wasser

Aufgabe: a) Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von zwei Metallen (Al, Cu)  
 b) Messung der Verdampfungswärme von Wasser  
 Literatur: H.J. Paus: Kapitel 40, S. 508 - 528

### 1. Grundlagen

a. Die Wärmemenge  $Q$  ist eine *Übergangsform der Energie* (ebenso wie die Arbeit)  
 Die Zufuhr einer Wärmemenge  $\Delta Q$  führt zu einer Temperaturerhöhung  $\Delta T$ , solange keine Phasenumwandlung auftritt.

Beobachtung (für konstantes Volumen):  $\Delta Q \sim \Delta T$   
 oder  $\Delta Q = C \cdot \Delta T$ , genauer:  $C = \frac{dQ}{dT}$  „Wärmekapazität“ in J/K

Eigenschaften von  $C$ :  $C = C(T)$ ,  $C \sim m$   $m$ : Masse

Die spezifische Größe  $c = \frac{C}{m}$  (*spezifische Wärmekapazität*) ist mengenunabhängig (also eine Materialkonstante). Ein Körper der Masse  $m$  nimmt damit bei einer Temperaturerhöhung um  $\Delta T$  die Wärmemenge

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad (\text{die Einheit von } c \text{ J/(kg K)})$$

(früher: 1 cal = 4,187 J)

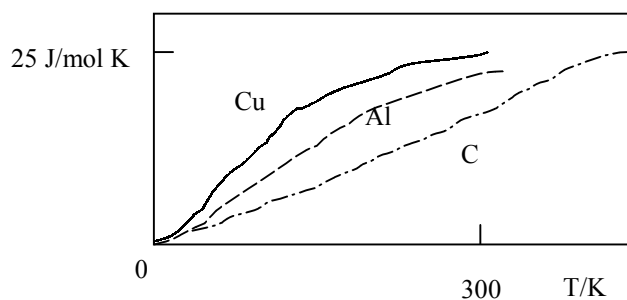
auf. In unserem Versuch liegt die Temperatur nahe bei der Zimmertemperatur. Dann ist  $c$  näherungsweise konstant.

$c$  ist aber unterschiedlich für verschiedene Phasen eines Stoffes (z.B. Eis, Wasser, Dampf).

Zweckmäßig ist der Bezug auf die Stoffmenge „ein Mol“ (1 Mol ist die Atom- bzw. Molekülmasse in Gramm. 1 Mol enthält  $N_{\text{Avogadro}} = 6 \cdot 10^{23}$  Teilchen)

*Molwärme, molare Wärmekapazität*  $C_{\text{mol}}$  (in  $\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ )

Die Temperaturabhängigkeit von  $C_{\text{mol}}$  fester Stoffe:



Für genügend hohe Temperaturen gilt die Regel von *Dulong-Petit*:

*Für feste Stoffe und hohe Temperaturen beträgt die molare Wärmekapazität  $C_{mol} \approx 25 \text{ J}/(\text{mol K})$ .*

*Für Gase ist  $C_p - C_V \approx R$ . ( $R = 8,314 \text{ J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$  universelle Gaskonstante)*

Erklärung: Die innere Energie  $U$  eines Systems ist gleichmäßig auf seine  $f$  Freiheitsgrade verteilt. Jeder Freiheitsgrad trägt  $\frac{1}{2} RT$  zur molaren inneren Energie bei:

### *Gleichverteilungssatz der Energie*

Die Freiheitsgrade geben die Anzahl der Möglichkeiten an, unabhängig Energie zu speichern.

Bei den meisten Gasen liegt die Differenz zwischen 8,3 und 9 J/(mol K) und ist wesentlich:

Nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre ist  $dU = dQ - dW$ .

Bei einer isochoren Expansion ( $V = \text{const.}$ ) wird keine Arbeit geleistet:  $dW = p \cdot dV = 0$  und

$$dU_{\text{mol}} = dQ_{\text{mol}} =: C_V dT \quad (\text{nach der Definition von } C_V).$$

Findet eine isobare Expansion ( $p = \text{const.}$ ) statt, so wird die Arbeit

$dW = -p dV = -R dT$  nach außen („Minuszeichen“) geleistet (ideale Gasgleichung) und die innere Energie beträgt

$$dU_{\text{mol}} =: C_p dT = C_V dT + R dT.$$

Wenn beide Expansionen bei der selben Temperatur enden, so muss die innere Energie die selbe sein, da sie nur von der Temperatur abhängt und nicht vom Weg im  $pV$ -Diagramm. Durch Gleichsetzen erhält man für die Differenz aus den molaren Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen:

$$C_p - C_V = R.$$

Für viele Festkörper ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck nur um etwa 5% größer als die molare Wärmekapazität, wenn das Volumen konstant gehalten wird ( $c_p \approx c_V$ ).

Beispiele:

- Atome schwingen im Kristallgitter des Festkörpers: 3 Translations-Freiheitsgrade  
3 Freiheitsgrade für potentielle Energie  
(3 Raumrichtungen!).

$$\Rightarrow U_{\text{mol}} = 3 \left(\frac{1}{2} RT\right) + 3 \left(\frac{1}{2} RT\right) = 3 RT$$
$$C_{\text{mol}} = C_V = dU_{\text{mol}}/dT = 3 R = 25 \text{ J}/(\text{mol K})$$

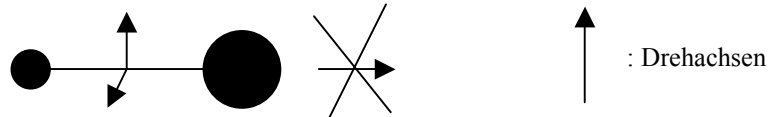
Jedes Atom (bzw. Molekül) trägt mit  $U_{\text{mol}}/N_{\text{Avogadro}} = 3 R/N_{\text{Avogadro}}$   $T = 3 kT$  zur inneren Energie und  $C_{\text{mol}}/N_{\text{Avogadro}} = 3 k$  zur Wärmekapazität bei. Um die *Temperatur pro Atom* um 1 K zu erhöhen, benötigt man demnach für viele Festkörper (unabhängig von der Art der Atome!) dieselbe Wärmemenge.

( $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  ist die Boltzmann-Konstante. Die Avogadro-Konstante  $N_{\text{Avogadro}}$  heißt auch Loschmidtsche Zahl  $L$ .)



Moleküle des idealen Gases stoßen elastisch, sie ziehen sich nicht an. Daher haben sie keine potentielle innere Energie. Stattdessen müssen wir ihre Rotationsenergie berücksichtigen:

- einatomigen Gasmolekül: 3 Translations-Freiheitsgrade  
(Rotationsenergie für Massenpunkt vernachlässigbar)  
 $\Rightarrow U_{\text{mol}} = 3 (1/2 RT) = 3/2 RT$   
 $C_V = 3/2 R \approx 12,5 \text{ J}/(\text{mol K})$  und  $C_P = 5/2 R \approx 20,8 \text{ J}/(\text{mol K})$
- zweiatomigen Gasmolekül: 3 Freiheitsgrade für die kinetische Energie und 2 Rotations-Freiheitsgrade.



Die Energie bei Rotation um die Verbindungslinie der Massenpunkte ist vernachlässigbar klein, weil das Trägheitsmoment sehr klein ist ( $r \approx 0$ ).

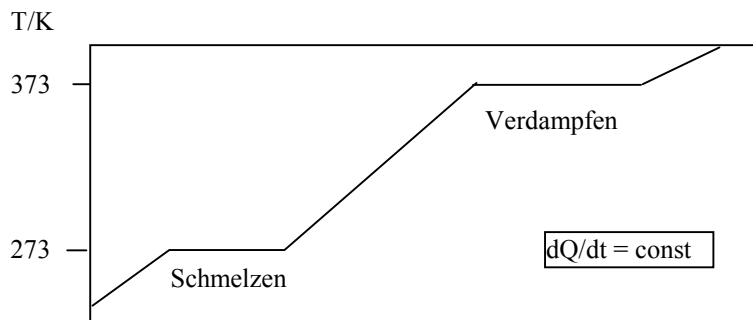
$$\Rightarrow C_V = 5/2 R \text{ und } C_P = 7/2 R$$

- drei- und mehratomige, dreidimensionale Gasmoleküle:  
3 Translations- und 3 Rotations-Freiheitsgrade  
 $\Rightarrow C_V = 3R$  und  $C_P = 4R$

Bei tiefen Temperaturen werden keine Rotationen angeregt, schließlich nimmt die Translationsbewegung ab  $\Rightarrow$  die Freiheitsgrade frieren nacheinander ein und damit nimmt die Wärmekapazität stetig bis auf Null ab.

## 2. Phasenumwandlung

Experimentelle Temperatur-Zeit-Kurve beim Erhitzen von Eis unter konstanter Wärmezufuhr



$$\text{Steigung: } \frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{1}{C}$$

I      II      III      IV      Zeit bzw.  
zugeführte Wärmemenge Q

Bereich I: Erwärmung von Eis

Bereich II: 1. Haltepunkt der Temperatur ( $\Delta T = 0$ ): Schmelzen von Eis  
Die Energie  $L_s$  wird für die Phasenumwandlung benötigt (um Bindungen zu trennen).

$$\text{„Latente Wärme“: } L_s = m \cdot \lambda_s$$

$\lambda_s$  ist die spezifische Energie für die Phasenumwandlung.

Bereich III: Erwärmung von Wasser ( $C_{\text{H}_2\text{O}} > C_{\text{Eis}}$ )  $C_{\text{H}_2\text{O}} = 4,19 \text{ kJ/ kg}\cdot\text{K}$

Bereich IV: 2. Haltepunkt der Temperatur: Verdampfung von Wasser

Latente Wärme:  $L_D = m \cdot \lambda_D$

### 3. Versuchsdurchführung und Auswertung

#### 3.1. Messung der spezifischen Wärmekapazität von Metallspänen

Ein Kalorimeter (isoliertes Gefäß) mit der Wärmekapazität  $C_K$  (Name: „Wasserwert“) wird mit Wasser gefüllt ( $m_W, T_1, c_W$ ).

Über einen Zeitraum  $t_1$  wird in konstanten Abständen die Temperatur des Wassers gemessen. Nach  $t_1$  werden Metallspäne der Masse  $m$  zugegeben, die im Ofen auf die Temperatur  $T_2$  aufgeheizt wurden. Die Wärmekapazität  $c$  ist zu bestimmen. Die Temperatur wird weiter fortlaufend gemessen.

Nach der Mischung findet ein Wärmeaustausch und damit ein Temperatúrausgleich statt.

$$T \Rightarrow T_M$$

Energiebilanz (es findet kein Phasenübergang statt und  $T_2 > T_1$ ):

Die Metallspäne geben ab:  $Q_{ab} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_M)$

Wasser und Kalorimeter nehmen auf:  $Q_{auf} = (c_W m_W + C_K)(T_M - T_1)$

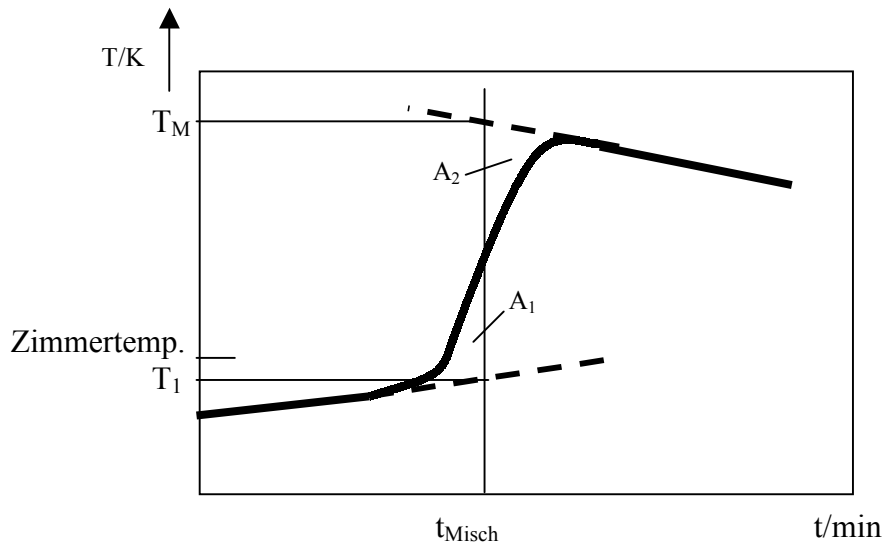
Falls es keine Wärmeverluste gibt, gilt:  $Q_{auf} = Q_{ab}$

$$\Rightarrow c = \frac{(m_W c_W + C_K)(T_M - T_1)}{m(T_2 - T_M)}$$

Bestimmung von  $T_1$  und  $T_M$ :

Die Temperatur im Mischkalorimeter wird mit einem Quecksilberthermometer gemessen. Da der Mischvorgang eine endliche Zeit benötigt und die Isolation des Gefäßes nicht perfekt ist, müssen die Temperaturen  $T_1$  und  $T_M$  durch *Extrapolation für den Idealfall eines unendlich schnellen Mischvorgangs* bestimmt werden.

Messkurve:



Dazu wird ein idealisierter mittlerer Mischzeitpunkt  $t_{Misch}$  eingeführt, womit die Messkurve durch Annahme einer plötzlichen Durchmischung angenähert wird.  $t_{Misch}$  wird so gewählt, daß zu diesem Zeitpunkt gerade die halbe Wärmemenge umgesetzt worden ist. Da die umgesetzte Wärmemenge proportional zur Temperaturdifferenz und der verstrichenen Zeit ist, ist dies der Fall, wenn die Flächen  $A_1$  und  $A_2$  zwischen der Messkurve, den extrapolierten Anfangs- und Endsteigungen und einer Geraden mit  $t = \text{const.}$  gleich sind. Die idealisierten Temperaturen  $T_M$  und  $T_1$  ergeben sich dann durch den Schnittpunkt der Extrapolationen mit der Geraden  $t = t_{Misch}$ .

### 3.2 Messung der spezifischen Verdampfungswärme

Dazu wird eine kleine Menge Wasser in einem isolierten Gefäß mit einer elektrischen Heizung zum Sieden gebracht. Die Temperatur wird laufend mit einem Thermoelementfühler und die Masse des Wassers durch Wägung des gesamten Gefäßes kontrolliert.

Der Massenverlust des Wassers  $\Delta m$  durch Verdampfung während einer Zeit  $\Delta t$  wird gemessen. Bei konstanter elektrischer Heizleistung  $P = U \cdot I$  können dann die „Latente Verdampfungswärme“  $L_D$  und die spezifische Verdampfungswärme  $\lambda_D$  nach:

$$L_D = \Delta m \cdot \lambda_D = U \cdot I \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \lambda_D = U \cdot I \cdot \frac{\Delta t}{\Delta m}$$

berechnet werden.

Der Versuch weist relativ große Fehlerquellen auf, unter anderem: Strahlungs- und Konvektionsverluste, da das Wasserbad offen und schlecht isoliert ist; Spritzer beim Siedeverzug; zurücklaufendes Wasser.

## 6. Versuch Der Stirling-Motor

(um 1816 Robert Stirling)

Aufgaben: - Aufnahme eines Kreisprozesses  
- Ermittlung von Wirkungsgraden

Literatur: H.J. Paus: Kap. 41, S. 513 - 541

### 1. Das ideale Gas und das p-V-Diagramm

Annahmen über das ideale Gas:

- Das Eigenvolumen der Atome/Moleküle ist vernachlässigbar klein,
- Es finden nur elastische Zusammenstöße der Atome/Moleküle untereinander und mit den Gefäßwänden (Impuls *und* kinetische Energie bleiben erhalten) statt,
- Auf die Atome/Moleküle wirken – außer bei den Zusammenstößen – keine Kräfte,
- Die Moleküle führen Zufallsbewegungen aus und befolgen die Newtonschen Bewegungsgesetze.

Das Experiment ergibt:

Nur bei niedrigen Temperaturen weichen die realen (Edel-)Gase vom idealen Gas ab.

$$pV = \text{const. bei } T = \text{const.} \quad (\text{Boyle-Mariotte})$$

$$p \sim T \text{ bei } V = \text{const.}$$

$$V \sim T \text{ bei } p = \text{const.} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} p \sim T \\ V \sim T \end{matrix}} \right\} \text{Gay-Lussac}$$

$$\Rightarrow p V = n R T \quad \text{ideale Gasgleichung}$$

R = 8,314 J/(mol K): universelle Gaskonstante

n: Stoffmenge in Mol

T: Temperatur in K (absoluter Nullpunkt bei  $-273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ )

### 2. Energieerhaltung – Erster Hauptsatz der Wärmelehre

$$\text{Gesamtenergie } E = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} + U$$

Innere Energie U: a) thermische innere Energie (unkorrelierte Bewegungs-, Rotations-, Schwingungsenergie der Moleküle)

b) chemische innere Energie (Bindungsenergie der Moleküle)

c) nukleare innere Energie.

**1. Hauptsatz der Wärmelehre:** Die innere Energie kann durch Zufuhr von mechanischer Arbeit  $\Delta W$  oder von Wärme  $\Delta Q$  vergrößert werden:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

**Arbeit und Wärme sind Übergangsformen der Energie.**

*mechanische Arbeit:*  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F/A) A \cdot d\mathbf{s} = p \cdot dV$

*Verdrängungsarbeit:* ( $p = \text{const.}$ ):  $W_V = p \Delta V$

*Ausdehnungsarbeit:*  $W_A = - \int p dV$

Definitionen:

innere Energie pro Mol  $U_{\text{molar}} := \frac{f}{2}RT$  (vgl. Gleichverteilungssatz der inneren Energie)

f: Freiheitsgrad (unabhängige Möglichkeit Energie zu speichern)

molare Wärmekapazität des idealen Gases (siehe auch Versuch „Wärmekapazität“):

$$c_v := \frac{dU}{ndT} = \frac{f}{2}R \quad (V = \text{const.}, \text{ es wird keine mechanische Arbeit verrichtet: } dQ = dU)$$

$$c_p := \frac{dQ}{ndT} = \frac{f}{2}R + R = \frac{f+2}{2}R \quad c_p - c_v = R$$

### Thermodynamische Prozesse

a. isochor:  $\Delta V = 0$ ,  $V = \text{const.}$

$\Rightarrow$  es wird keine mechanische Arbeit geleistet,  $\Delta U = \Delta Q = n \cdot c_v \Delta T$

b. isobar:  $\Delta p = 0$ ,  $p = \text{const.}$

c. isotherm:  $\Delta T = 0$ ,  $T = \text{const.}$  (in Thermostatbad;  $dU_{\text{molar}}/dT = d(\frac{1}{2} fRT)/dT = 0$ )

Isotherme Expansion ( $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta Q = -\Delta W$ ) eines idealen Gases

vom Volumen  $V_1$  nach  $V_2$ :

$\Rightarrow$  abgegebene (markiert durch Minuszeichen) mechanische Arbeit

$$W = - \int_1^2 p dV = - \int_1^2 nRT \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$\uparrow$  ideale Gasgleichung

d. adiabatisch:  $\Delta Q = 0$ , d.h. ohne Wärmezufuhr, thermisch isoliert.

### 3. Die Überführung von Wärme in mechanische Arbeit (im kontinuierlichem Kreisprozess)

Wie kommt man nach einer isothermen Expansion zurück zum Ausgangsvolumen  $V_1$ ?  
(unter Abgabe von mechanischer Arbeit)

a) Auf derselben Isotherme  $T_2$ :

der rückläufige Prozess erfordert die gleiche mechanische Arbeit,  
das System würde nur als Speicher fungieren.

b) Umweg über zweite Isotherme  $T_1$ :

$\Rightarrow$  Kreisprozess mit I: isotherme Expansion (unter Verrichtung der Arbeit  $W_I$ )

II: isochore Abkühlung ( $V = \text{const.}$ )

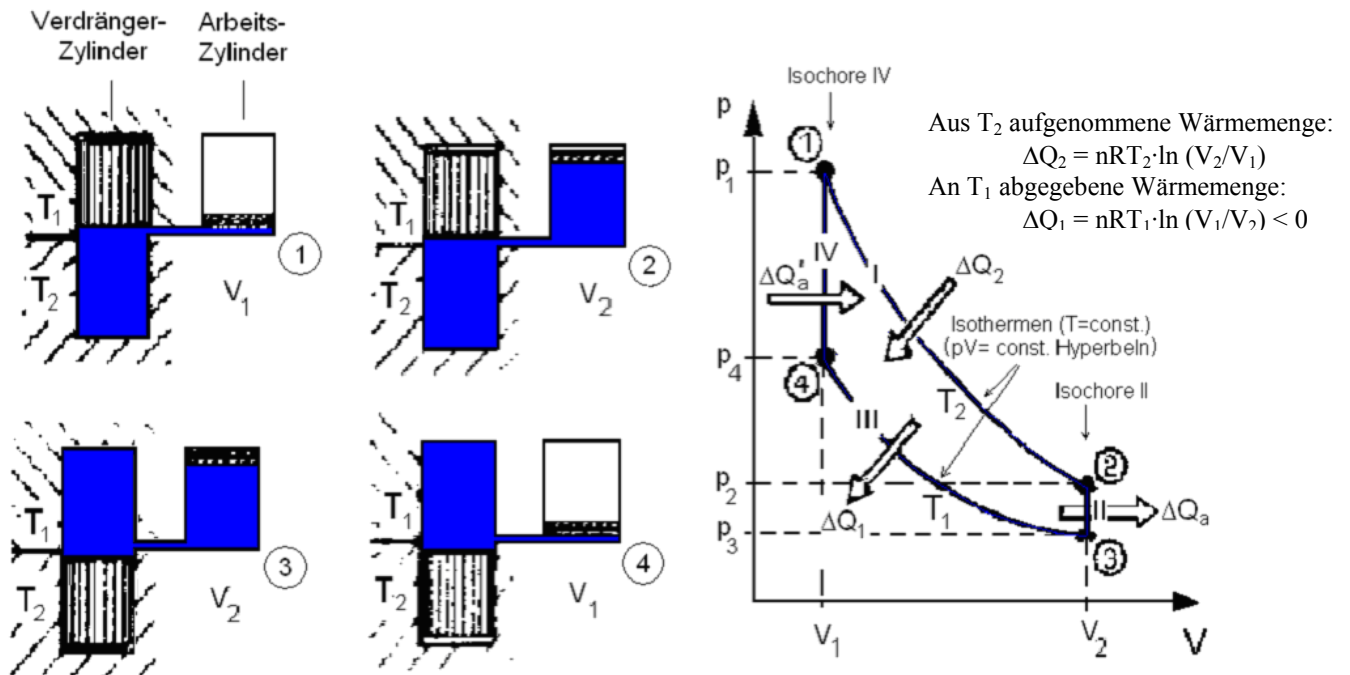
(senkt nur innere Energie um  $\Delta Q_a = n \cdot c_v \Delta T$ )

III: isotherme Kompression (Hineinstecken der Arbeit  $W_{III}$ )

IV: isochore Erwärmung (erhöht nur innere Energie um  $\Delta Q_a$ )

$\Rightarrow$  „Stirling-Prozess“

## Die vier Arbeitstakte des Stirling-Motors:



Der Stirling-Motor besteht aus einem Verdränger- und einem Arbeitszylinder, die durch ein Rohr mit einander verbunden sind. Die Kolben sind über Pleuelstangen und ein Schwungrad verbunden. Der Zylinder des Verdrängerkolbens wird an einem Ende auf  $T_2$  geheizt, auf der anderen Seite auf  $T_1$  gekühlt. Das Arbeitsgas ist Luft. In der Ausgangsstellung (1) befindet sich der Verdrängerkolben in der kalten Hälfte des Zylinders auf der Temperatur  $T_1$ , das Gas in der heißen Hälfte auf der Temperatur  $T_2$ , der Arbeitskolben ist in der tiefsten Stellung und das Gas mit dem Volumen  $V_1$  steht unter dem hohen Druck  $p_1$ .

Takt I

Von (1) nach (2) dehnt sich das Gas *isotherm* (d.h. die Temperatur bleibt konstant auf  $T_2$ ) von  $V_1$  nach  $V_2$  aus und nimmt dabei die Wärmemenge  $\Delta Q_2$  auf. Der Arbeitskolben geht dabei nach oben, der Druck sinkt von  $p_1$  auf  $p_2$ . Die mechanische Verdrängungsarbeit wird nach außen abgegeben und im Schwungrad gespeichert.

Takt II

Von (2) nach (3) bleibt der Arbeitskolben in der höchsten Position stehen, während sich der Verdrängerkolben in den heißen Teil des Zylinders bewegt. Das Gasvolumen bleibt dabei konstant (*isochor*). Das Gas kühlt sich jedoch ab, indem es beim Vorbeiströmen die Wärmemenge  $\Delta Q_a$  an den Verdrängerkolben abgibt, bis er die Temperatur  $T_2$  erreicht. Der Druck nimmt von  $p_2$  auf  $p_3$  ab.

Takt III

Von (3) nach (4) wird das Gas *isotherm* (konstante Temperatur  $T_1$ ) komprimiert, indem der der Arbeitskolben von oben nach unten gedrückt wird. Die dafür erforderliche Arbeit  $\Delta Q_1$  bringt das Schwungrad auf. Der Gasdruck nimmt von  $p_3$  auf  $p_4$  zu, das Volumen von  $V_2$  auf  $V_1$  ab.

Takt IV

Auf dem Weg von (4) zur Ausgangslage (1) steht der Arbeitskolben. Der Verdrängerkolben bewegt sich aus der heißen Zone ( $T_2$ ) in die kalte Zone ( $T_1$ ). Das Gas strömt am Kolben vorbei, erwärmt sich auf  $T_2$ , indem es die Wärmemenge  $\Delta Q'_a$  vom Verdrängerkolben aufnimmt, bis dieser sich auf  $T_1$  abgekühlt hat. Das Gasvolumen bleibt konstant auf  $V_1$ , der Gasdruck nimmt jedoch von  $p_4$  auf  $p_1$  zu (*isochore* Erwärmung).

Energiebilanz:

I:  $dU = 0$  da  $T_2 = \text{const.}$   
 $\Rightarrow \Delta Q_2 = -W_I$  unter Wärmezufuhr wird mechanische Arbeit nach außen verrichtet (daher das Minuszeichen)

III:  $-\Delta Q_1 = W_{III}$  Die Kompression erfolgt durch Zufuhr mechanischer Arbeit  $W_{III}$  (vom Schwungrad). Die innere Energie ändert sich aber nicht, weil die Temperatur  $T_1$  konstant bleibt. Die entstehende Wärme  $Q_1$  wird an die Umgebung abgegeben.

II und IV:  $\Delta Q_a = \Delta U_{II}$   $\Delta Q'_a = \Delta U_{IV}$   $\Delta W = 0$  (da isochor)  
 $\Delta U_{II,IV} = mc(T_{2,1} - T_{1,2}) \Rightarrow |\Delta U_{II}| = |\Delta U_{IV}|$

Bei Zwischenspeicherung ( $\Delta Q_a = \Delta Q'_a$ ) der Wärme mit Hilfe des Wärmetauscherkolbens gehen die Takte II und IV nicht in die Energiebilanz ein. In den isochoren Takten nimmt das System (Arbeitsgas) weder mechanische Arbeit von außen auf, noch gibt es Arbeit ab.

\* Aus Reservoir  $T_2$  wird die mechanische Arbeit  $W_I = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$  aufgenommen  
 (Berechnung siehe oben)

Ans Reservoir  $T_1$  wird die mechanische Arbeit  $W_{III} = -nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$  abgegeben (-)  $\uparrow$

In den adiabatischen Zyklen ist  $W_{II} = W_{IV} = 0$   
 (da  $\Delta V = 0$ ; der Verdrängerzylinder dient nur als Wärmetauscher)

Die pro Umlauf nach außen verrichtete mechanische Arbeit ist also die Differenz:

\*\*  $W_t = W_I - W_{III} = nR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2}{V_1}$  (das ist die Fläche im  $pV$ -Kreisprozess)

#### 4. Wirkungsgrad:

Thermischer Wirkungsgrad:  $\eta = \frac{\text{verrichtete mechanische Arbeit}}{\text{aufgenommene Wärmemenge}} = \frac{W_t}{Q_1}$

\* und \*\*  $\Rightarrow \eta_{ideal} = \frac{W_t}{W_I} = \frac{nR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2}{V_1}}{nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1$

$\Rightarrow$  100%ige Überführung von Wärme in mechanische Arbeit ist unmöglich.  
**Es gibt kein Perpetuum Mobile (Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre).**

Im reversiblen *Kreisprozess nach Carnot* durchläuft das Arbeitsgas zwei *isotherme* Zustandsänderungen (d.h. wie im Stirling-Prozess:  $1 \rightarrow 2$ ;  $3 \rightarrow 4$ ) und zwei *adiabatische* Zustandsänderungen (statt der isochoren Schritte:  $2 \rightarrow 3$ ;  $4 \rightarrow 1$ ), bis es in seinen Ausgangszustand zurückkehrt.

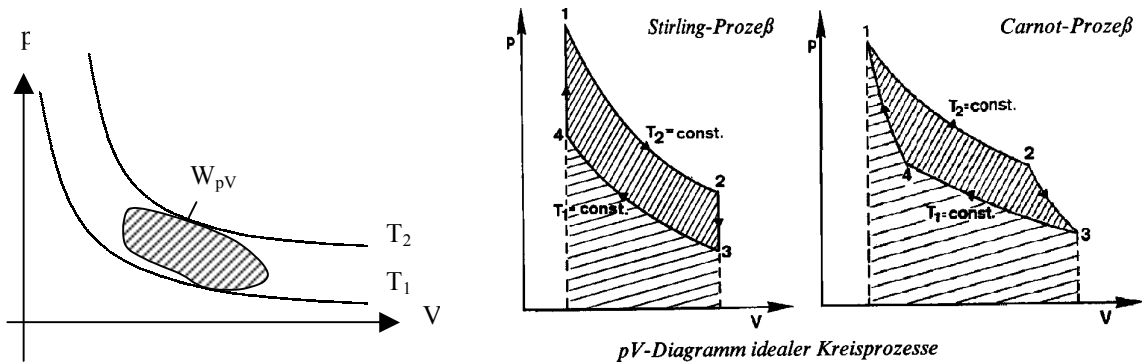
In den adiabatischen Schritten ist das Arbeitsgas thermisch isoliert, d.h. es wird keine Wärme aufgenommen oder abgegeben. Nach Durchlaufen des Zyklus ist das Gas wieder im Ausgangszustand, seine innere Energie hat sich nicht geändert. Nach dem Ersten Hauptsatz folgt für die mechanische Arbeit nach Durchlaufen des Zyklus:  $W = Q_2 - Q_1$  und für den Wirkungsgrad (wie für die Stirling-Maschine)

$\eta_{Carnot} = (Q_2 - Q_1) / Q_1 = W_t / W_I = (T_2 - T_1) / T_2$ . (T in Kelvin einsetzen !)

Beliebige Kreisprozesse kann man sich in Gedanken in isotherme und adiabatische Teilstücke zerlegen und so durch Carnotsche Prozesse approximieren. Daraus folgt, dass es keinen Kreisprozess mit einem höheren Wirkungsgrad als dem Carnotschen geben kann.

Der Carnotsche Prozeß lässt sich – im Gegensatz zum Stirlingschen – nicht in der Praxis realisieren, weil es streng genommen keine ideale thermische Isolation für adiabatische Zustandsänderungen gibt.

### 5. Der reale Kreisprozeß

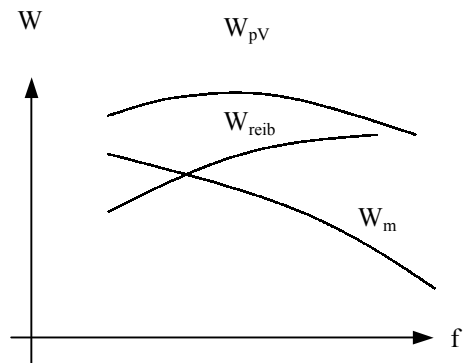


- Die Arbeitstakte sind nicht streng getrennt, weil die Zylinder über Pleuelstangen gekoppelt sind und sich auf Sinus-Cosinus-Kurven statt abwechselnd bewegen (⇒ die Fläche im p-V-Diagramm ist abgerundet).
- Strömungsgeschwindigkeit des Gases insbesondere bei hoher Drehzahl zu hoch für einen guten Wärmeaustausch
- der Regenerator arbeitet nicht effektiv
- Totvolumen
- Druckverluste (nach außen wegen der Welledurchführung)
- Reibungsverluste

Nicht vollständige Abgabe von Arbeit:

Innerer Wirkungsgrad:

$$\eta_i = \frac{W_{pV}}{|W_i|} = \frac{W_{pV}}{nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}$$



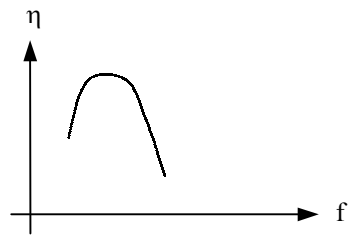


Abgegebene Arbeit pro Umdrehung:

$$W_m = \int M d\varphi = 2\pi M$$

Mechanischer Wirkungsgrad:

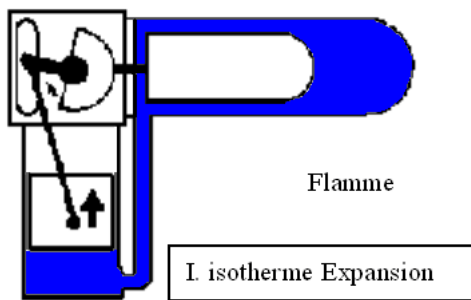
$$\eta_m = \frac{W_m}{W_{pV}}$$



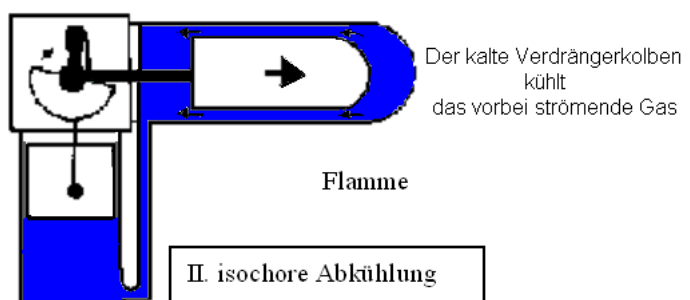
### Die Vorteile des Stirling-Motors:

- in der Praxis funktionierende Wärme-Kraft-Maschine
- nutzt auch geringwertige Wärmequellen (Abwärme, Sonnenenergie, Feuer)
- kontinuierliche, nicht explosionsartige Verbrennung
- läuft auch bei niedriger Verbrennungstemperatur (aber dann kleines  $\eta$ )
- daher umweltschonend (z.B. brauchen keine Stickoxide entstehen)
- einfacher Aufbau, leiser Lauf, benötigt weder Zündung noch Ventile
- technische Verwendung vor allem als „Kältemaschine“ und „Wärmepumpe“

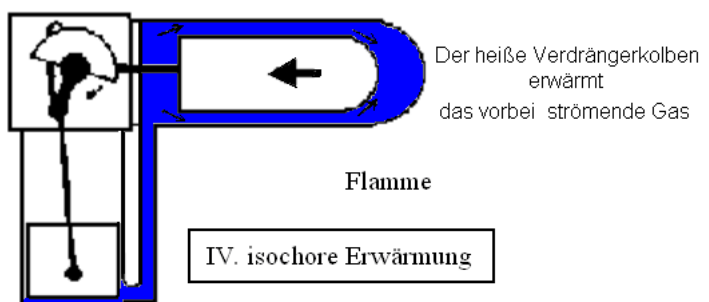
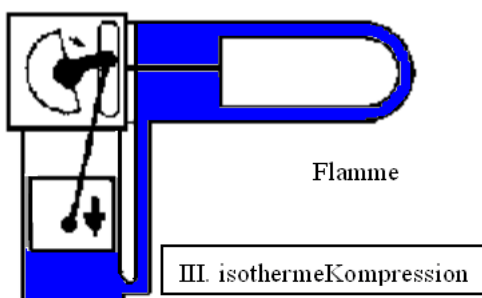
### Die Arbeitsphasen des Stirlingmotors im Praktikumsversuch



Arbeitskolben in Bewegung



Arbeitskolben ruht



## 7. Versuch Oberflächenspannung

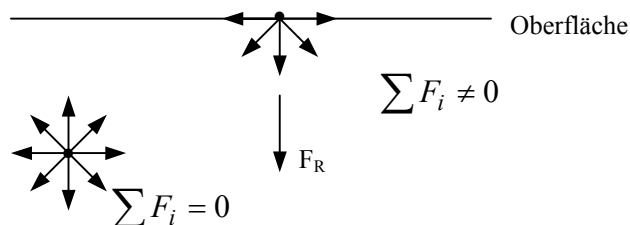
### 1. Grundlagen

Beispiele: Wassertropfen, Quecksilbertropfen, Wasserläufer (Spinne auf Wasser), Imprägnieren von Kleidung; Spül- und Waschmittel; Farben; verlaufender Lack (Oberflächenschutz)

Chemie: Tenside, Detergentien, Emulgatoren; Dispersionsfarben  
 Werkstoffwissenschaften: Keimbildung, kritische Korngröße, Kornwachstum;  
 Flussmittel (Verbindungstechnik: Lot, Zuschlag beim Schweißen)

Ursache: Kräfte zwischen den Molekülen in Flüssigkeiten und Festkörpern

Flüssigkeiten: Kräfte: z.B. Dipol-Dipol oder van-der-Waals  
 ⇒ Kohäsion (Zusammenhangskräfte)



Um ein weiteres Molekül an die Oberfläche zu bringen, ist Arbeit notwendig.

Um die Oberfläche um  $\Delta A$  zu vergrößern, muss die Arbeit  $\Delta W$  aufgewandt werden:

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A \quad \sigma \text{ ist eine Materialkonstante}$$

Flüssigkeiten: **Oberflächenspannung**  $\sigma = \text{Kraft/Längenelement}$

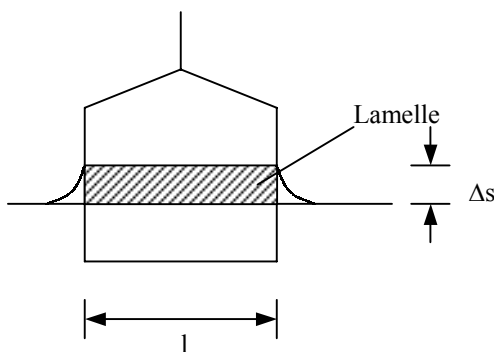
Festkörper: **spezifische Oberflächenenergie**  $\sigma = \Delta W/\Delta A$

(z.B. wichtig bei Keimbildung, Kristallwachstum)

Einheit:  $\text{J/m}^2 = \text{N/m}$  (früher  $\text{dyn/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$ )

### 2. Methoden zur Bestimmung von $\sigma$

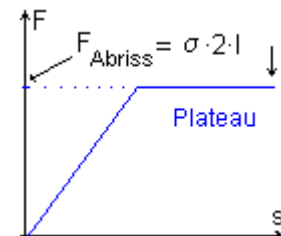
2.1 Abreissmethode (Die Oberfläche wird durch Herausziehen eines Plastikrings mit dem Umfang  $l$  aus einer Flüssigkeit vergrößert. Zwischen dem Ring und der Flüssigkeitsoberfläche bildet sich eine Lamelle mit der Fläche  $\Delta A$ .)



Neu gebildete Oberfläche der Lamelle:

$$\Delta A = 2 \cdot l \cdot \Delta s$$

Der Faktor 2 steht wegen der Vorder- und Rückseite der Lamelle.

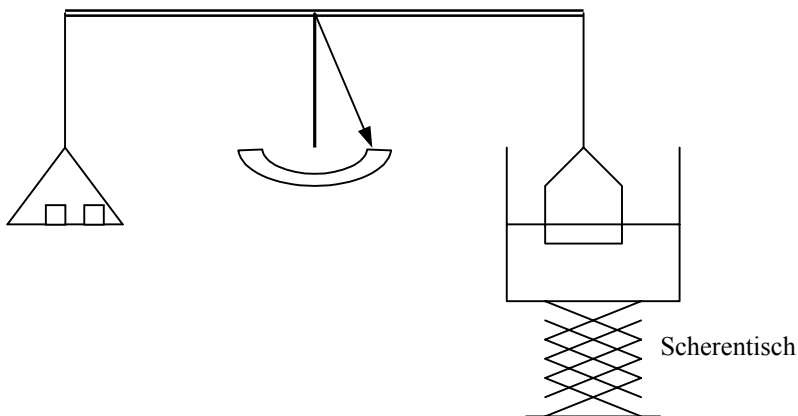


$$\sigma := \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2l \Delta s} = \frac{F}{2l}$$

Es wird die Kraft bei der größten erreichten Höhe  $\Delta s$  (beim Abreißen) gemessen.

Beachte: Die Kraft  $F$  hängt *nicht* von  $s$  ab (vgl. mit Verhalten einer Feder, Gummimembran).

Die Kraftmessung erfolgt mit einer empfindlichen Waage (Massenauflösung von 1 mg). (Sie werden im Vorversuch mit einer Federwaage beobachten, dass die Kraft vor dem Abreißen nicht von s abhängt).



### Versuchsablauf

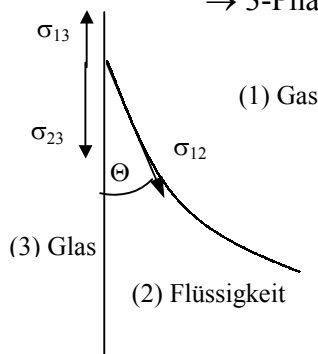
1. Waage ins Gleichgewicht bringen, wobei sich der Drahtbügel dicht unterhalb der Oberfläche befinden soll.  
Wir verwenden statt eines geraden Drahtbügels einen Ring mit 30 mm Durchmesser. (Bei einer Balkenwaage müssen Sie mit Tarmasse  $m_0$  (= Gewicht des Bügels – Auftrieb) zuerst den Ausgleich der Kräfte einstellen.)
2. Der Scherentisch wird in kleinen Schritten abgesenkt → Es bildet sich eine Lamelle.  
Wichtig: Bei einer Balkenwaage zusätzliche Drehmomente vermeiden, die bei schräg stehendem Waagebalken (d.h. bei nicht austarierter Waage) auftreten würden.  
Wenn die Lamelle abreißt, wird die Kraft  $F$  bzw. die aufgelegte Gesamtmasse  $m_A$  notiert:

$$F = (m_A - m_0)g$$

$$\sigma = \frac{(m_A - m_0)g}{2l}$$

### 2.2 Kapillarmethode (Grenzfläche zwischen festen und flüssigen Körpern)

Wechselwirkungen an der Kapillarwand zwischen Luft (1), Flüssigkeit (2) und Glas (3)  
→ 3-Phasen-Grenze:



Grenzflächenspannungen sind die treibenden Kräfte zur Verkleinerung der Grenzfläche:  
tangente Kraft  $F = \sigma dl$  (Kraft auf Grenzlinie  $dl$ )  
 $\sigma_{kl}$ : Grenzflächenspannungen  
 $\theta$ : Grenzwinkel, Randwinkel  
 $\sigma_{13}$  (fest – Gas) sehr klein  
 $\sigma_{23}$  (fest – flüssig)  
positiv, wenn Kohäsion > Adhäsionskraft  
negativ, wenn Kohäsion < Adhäsionskraft

Kohäsionsenergie: Schaffung von 2 Gasoberflächen auf Flüssigkeit durch Trennen einer Flüssigkeitssäule von  $1 \text{ m}^2$

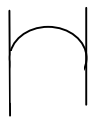
Adhäsionsenergie: Entfernen einer Flüssigkeitshaut von  $1 \text{ m}^2$  auf einer Festkörperoberfläche. Es entsteht dabei  $1 \text{ m}^2$  freie Oberfläche des Festkörpers und  $1 \text{ m}^2$  Flüssigkeitsoberfläche.

Im Kräftegleichgewicht gilt

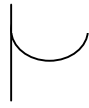
$$\sigma_{13} l = \sigma_{23} l + \sigma_{12} \cos \Theta l$$

$$\cos \Theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}} \quad \text{„Kapillargesetz“, engl.: Young's Law}$$

Benetzung: Die Flüssigkeit steigt in der Kapillare auf, um die Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Luft möglichst klein zu halten



$\theta > 90^\circ$   
nicht benetzend



$\theta < 90^\circ$   
benetzend



$\theta = 0^\circ$   
vollständig benetzend

In einer engen Kapillare ist die Flüssigkeitsoberfläche kugelförmig.

Der Druck in der Flüssigkeit (mit kugelförmiger Oberfläche) beträgt:

$$p = \frac{2\sigma}{r'} \quad r': \text{Krümmungsradius}$$

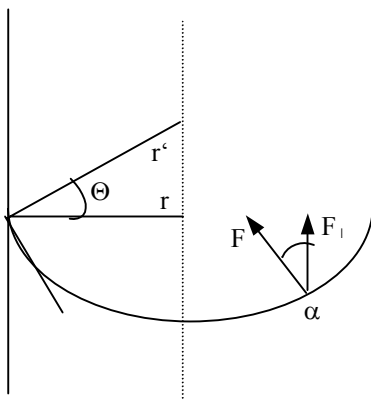
Herleitung der Beziehung für den Druck:

Zur Vergrößerung der Kugel ist folgende Arbeit nötig:

$$dW_{OF} = \sigma dA = \sigma 8\pi r dr' \quad A = 4\pi r'^2$$

$$dW_{Vol} = p dV = p \frac{4\pi}{3} 3r'^2 dr' = p 4\pi r'^2 dr' \quad V = \frac{4}{3}\pi r'^3$$

$$dW_{OF} = dW_{Vol} \Rightarrow p = \frac{2\sigma}{r'}$$



$$\cos \Theta = \frac{r}{r'} \Rightarrow p = \frac{2\sigma \cos \Theta}{r}$$

Für die Steighöhe ist die Vertikalkomponente der Kraft wirksam:

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= F \cos \alpha = p dA \cos \alpha \\ F_{\perp ges} &= \int p dA \cos \alpha = \int \frac{2\sigma}{r} \cos \Theta \cos \alpha dA \\ &= \frac{2\sigma}{r} \cos \Theta \int \cos \alpha dA = 2\pi r \sigma \cos \Theta \end{aligned}$$

$$F_{\perp ges} = F_{schwer}$$

Im Gleichgewicht ist:

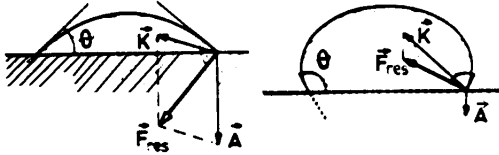
$$2\pi r \sigma \cos \Theta = m g = \rho V g = \rho \pi r^2 h g$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \Theta}{r \rho g} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \rho \cdot r \cdot h$$

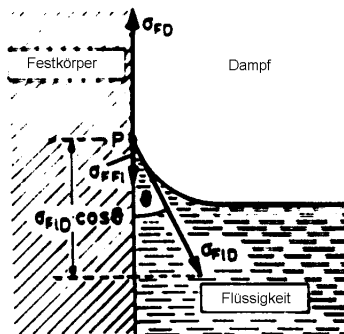
Der Radius  $r$  der Kapillare wird mit einem Fernrohr berührungslos gemessen. Aus der Steighöhe  $h$  kann somit die Oberflächenspannung  $\sigma$  ermittelt werden.

Randwinkel  $\theta$

Grenzfläche	$\theta$
Wasser auf fettfreiem Glas	$\approx 0^\circ$
Wasser auf Paraffin	$105^\circ - 110^\circ$
Wasser auf Wolle	$160^\circ$
Quecksilber auf Glas	$140^\circ$
Quecksilber auf Stahl	$154^\circ$



Ein Tropfen auf einer Festkörperoberfläche:  
 (a) Benetzend: Die Resultierende der Kohäsions- und Adhäsionskräfte (K bzw. A) zeigt in den Festkörper.  
 (b) Nicht benetzend: Die Resultierende zeigt in die Flüssigkeit.



Eine benetzende Flüssigkeit steigt am Gefäßrand hoch; es bildet sich ein Randwinkel  $\theta$  aus. Drei Grenzflächen sind zu betrachten: Festkörper-Dampf, Flüssigkeit-Dampf und Festkörper-Flüssigkeit. Die Oberflächen- und Grenzflächenspannungen sind skalare Größen; die eingezeichneten Pfeile repräsentieren die zugehörigen, auf die Längeneinheit der Berandungslinie bezogenen Kräfte. Die Berandungslinie in P steht senkrecht auf der Zeichenebene.

Oberflächenspannungen fester und flüssiger Körper gegen Dampf (bzw. Luft).

feste Körper	Temperatur	$\sigma_A$ in mN/m
LiF (100)	20 °C	340
CaF (111)	20 °C	450
BaF <sub>2</sub> (111)	20 °C	280
MgO (100)	20 °C	1200
Kupfer	20 °C	1820
Silber	20 °C	1190
flüssige Körper		
Kupfer	1535 °C	1300
Silber	1100 °C	878.5
Quecksilber	20 °C	486.5
Wasser	20 °C	72.88
Benzol C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	20 °C	28.88
Methanol CH <sub>3</sub> OH	20 °C	22.50
Äthanol C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	20 °C	22.39
Oktanol C <sub>8</sub> H <sub>17</sub> OH	20 °C	27.53
Älther (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	25 °C	20.14
Ölsäure C <sub>17</sub> H <sub>33</sub> COOH	20 °C	32.5
Helium	2.5 K	0.308
Wasserstoff	20 K	2.01
Stickstoff	75 K	9.41
Sauerstoff	77 K	16.48

Grenzflächenspannungen zwischen Flüssigkeiten

Substanzen	Temp.	$\sigma_G$ in mN/m
Wasser-Nitrobenzol	20 °C	25.2
Wasser-Benzol	20 °C	35.0
Wasser-Tetrachlorkohlenstoff	20 °C	45.0
Quecksilber-Wasser	20 °C	415
Quecksilber-Äthanol	20 °C	389
Quecksilber-Benzol	20 °C	357

## 8. Versuch Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Thema: Festigkeit und Elastizität von Festkörpern

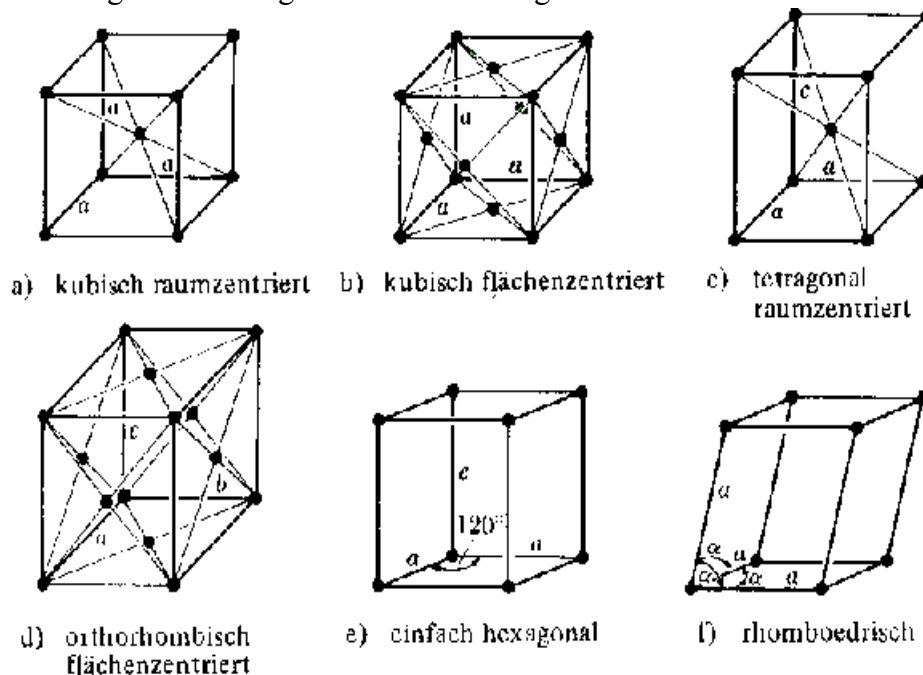
### 1. Grundlagen: Innerer Aufbau von Festkörpern

*Amorphe Festkörper:* Es besteht nur eine Nahordnung über wenige Nachbarn.

(Beispiele: Gläser, glasartige Metalle, nichtpolymerisierte Kunststoffe)

*Kristalline Festkörper:* Die Atome sind periodisch angeordnet und werden durch Bindungen lokalisiert (Ionen-, Atombindung, metallische Bindung).

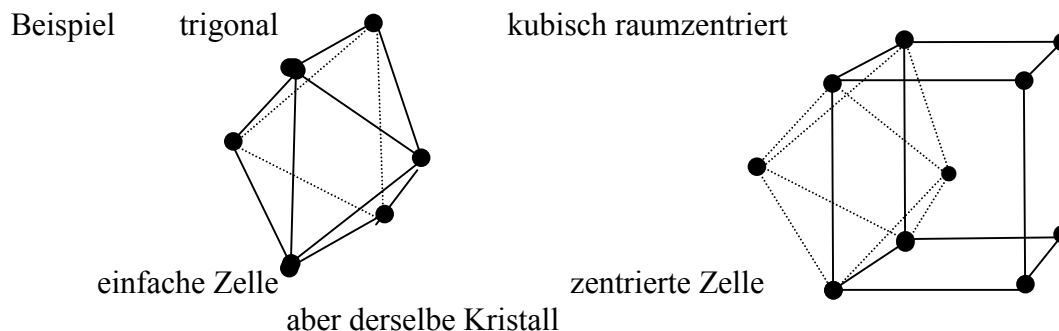
Das Material besitzt die Struktur eines dreidimensional periodischen Gitters. Es kann durch Aneinanderreihung einer Elementarzelle lückenlos aufgebaut werden. Bei der Form der gewählten Elementarzelle hält man sich an die Konvention der folgenden Abbildungen, welche die wichtigsten Kristallgitter für Metalle angibt:



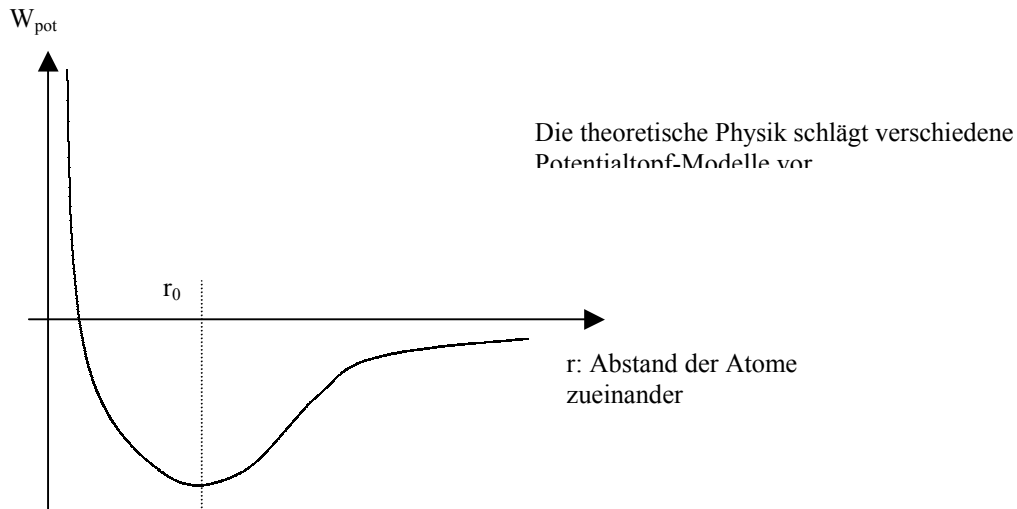
Die wichtigsten Translationsgitter der Metalle

Prinzipiell sind ganz unterschiedliche Elementarzellen für ein Gitter möglich.

Hochsymmetrischen, zentrierten Elementarzellen wird der Vorzug vor schiefwinkligen, einfachen Zellen gegeben.



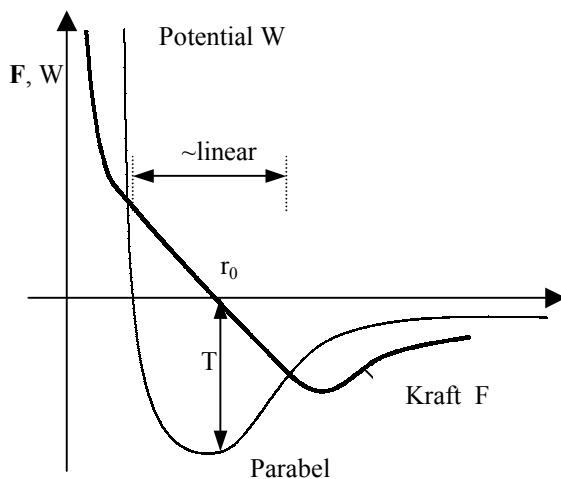
Frage: Welche Energie bzw. Kräfte wirken zwischen den Atomen?



- a)  $r \rightarrow \infty$   $W_{pot} \leq 0$
- b)  $r \rightarrow r_0$  (Abstandsverringern)  $W_{pot}$  sinkt, Anziehung.  
Elementare Bindung oder van-der-Waals-Kräfte (Dipolkräfte)
- c)  $r \rightarrow 0$  Abstoßung,  $W_{pot}$  steigt, Elektronenüberlappung – Pauli-Verbot

Im Minimum der Kurve wird eine stabile Gleichgewichtslage erreicht  
 $\Rightarrow$  Gitterkonstante im Festkörper (bzw. Ionenabstand im Molekül)

Potentielle Energie  $\qquad$  Kräfte:  
 $W_{pot} = - \int \vec{F} d\vec{s} \Rightarrow \vec{F} = - gradW$



$W = A(r - r_0)^2 - T$  Potentialtopf ist bei kleinen äußeren Kräften angenähert parabelförmig  
 $\Rightarrow F = -2A(r - r_0) = -D(r - r_0)$  dann ist die Kraft proportional zur Auslenkung (s.a. Feder):  
*lineares Kraftgesetz*

Für kleine Kräfte ist eine Verformung reversibel (d.h. die Ausgangslage wird wieder angenommen).

## 2. Der reale Werkstoff

Nur wenige Festkörper sind amorph (z.B. Gläser) oder Einkristalle (z.B. Si-Wafer), sondern sie sind in der Regel Polykristalle oder zumindest teilkristallin aufgebaut. Sie bestehen aus kleinen geordneten Bereichen, den sogenannten Kristalliten oder „Körnern“ mit unterschiedlichen Orientierungen. Die Korngrenzen sind (bis auf die Zwillingskorngrenzen) in der Regel stark gestörte Bereiche.

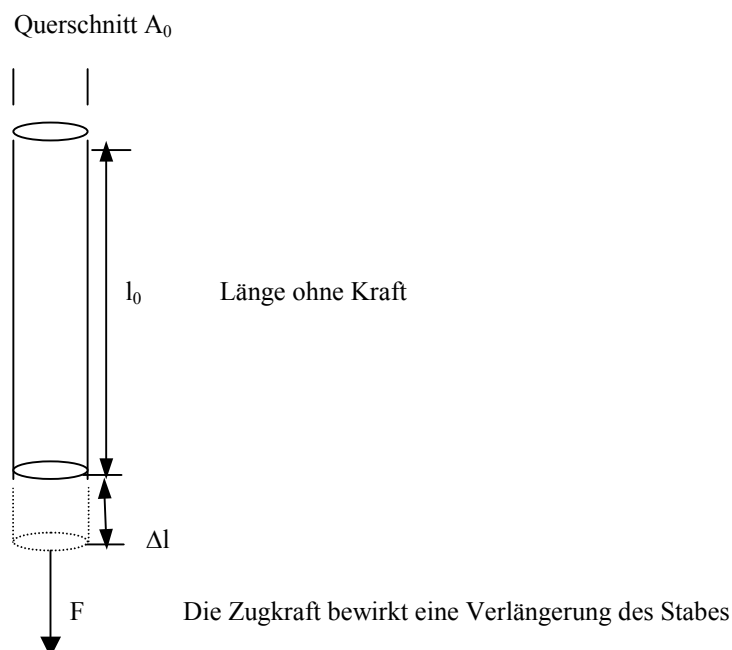
Wenn starke Kräfte auf das Material einwirken, verformt es sich bleibend („*plastische Verformung*“). Dabei können drei unterschiedliche Mechanismen ablaufen:

- „*Versetzungsgleiten*“: Die „Netzebenen“ des Kristalls gleiten nicht komplett mit allen ihren Atomen simultan aneinander ab. Die Bewegung wird vielmehr zerlegt in das Wandern linearer Kristallbaufehler, *Versetzungen* genannt. Es müssen sich nur die Atome in der Versetzungslinie und nicht alle Atome auf einer Netzebene simultan um kleine Strecken bewegen (Vergleich mit „Teppichfalte“). Die erforderliche Kraft für die Verformung ist daher um mehrere Größenordnungen kleiner.
- „*Scherung*“ und „*Zwillingsbildung*“: Das Gitter klappt schlagartig in eine neue Position um, wobei die Atome in den Elementarzellen nur um kleine Strecken verschoben werden (sehr schnell ablaufender Vorgang).
- „*Korngrenzengleitung*“: Die Körner gleiten entlang den Korngrenzen aneinander ab (wichtig bei langsamen Verformungen („Kriechen“), hohen Temperaturen, extrem feinkörnigen Werkstoffen, bei denen das Volumen der Korngrenzen eine vergleichbare Größenordnung wie das Volumen der Kristallite erreicht  
=> *Nanokristalline Werkstoffe, Superplastizität*).

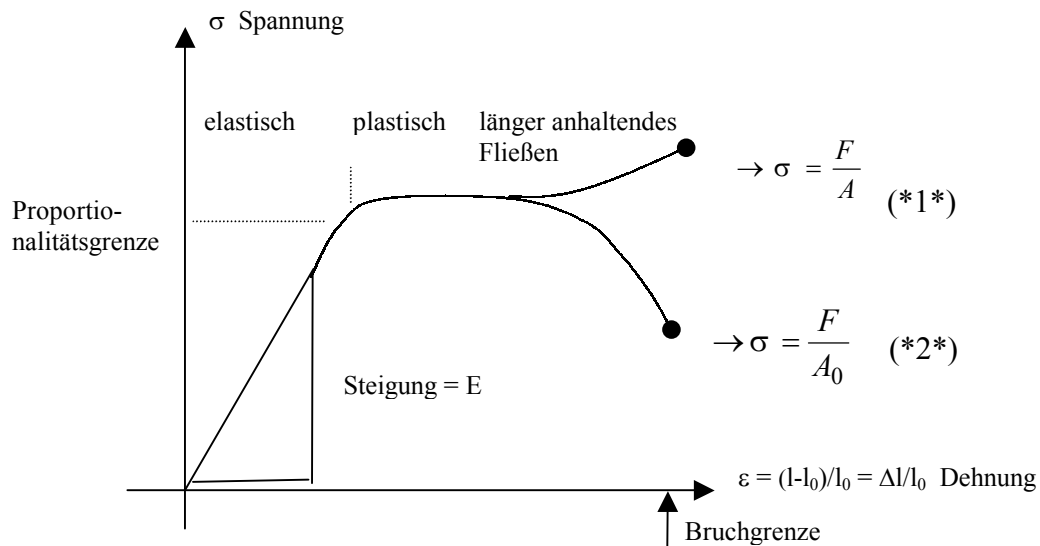
(langsam ablaufender Vorgang, weil die „Verzahnung“ der unebenen Korngrenzen und irregulär geformten Körner durch Diffusion abgebaut werden muss.)

## 3. Der „Zugversuch“ im Praktikum

Materialeigenschaften sollen im allgemeinen *geometrieunabhängig* angegeben werden. Daher werden die Größen auf die Abmessungen der Probe bezogen, oder es werden zur Messung Vorschriften nach DIN eingehalten, nach denen die Geometrie und die Versuchsbedingungen in engen Grenzen festgelegt sind (z.B. Form und Maße der Probe = „Standardprobe“, Zugeschwindigkeit, wirkende Kraft, Temperatur).







(\*1\*) „**Physikalisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm**“ (ohne technische Bedeutung)

(\*2\*) Technisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm oder „**Verfestigungskurve**“, „**Fließkurve**“

(Die momentane Querschnittsfläche  $A$  kann praktisch nicht gemessen werden. Man bezieht daher die Spannung auf die Querschnittsfläche  $A_0$  zu Versuchsbeginn).

- Linearer Bereich: Es gilt das Hookesche Gesetz in linearer Form

$$F \sim \Delta l \Rightarrow \frac{F}{A_0} \sim \frac{\Delta l}{l_0} = \sigma \sim \epsilon$$

$\sigma$  = Spannung;  $\epsilon$  = Dehnung

$$\underline{\sigma = E\epsilon} \quad (\text{lineares}) \quad \underline{\text{Hookesches Gesetz}}$$

$E$  = Elastizitätsmodul in  $\text{N/m}^2$  oder  $\text{N/mm}^2$

(Der Elastizitätsmodul ist genau genommen eine Tensorgröße, weil der die Vektoren Spannung und Dehnung verknüpft.)

- Elastischer Bereich: die Dehnung ist reversibel (d.h. die Probe nimmt nach der Entlastung wieder die Ausgangsmaße an).
- Plastischer Bereich: die Verformung ist irreversibel.
- Fließen: langanhaltende plastische Verformung bis zum Zerreißen.

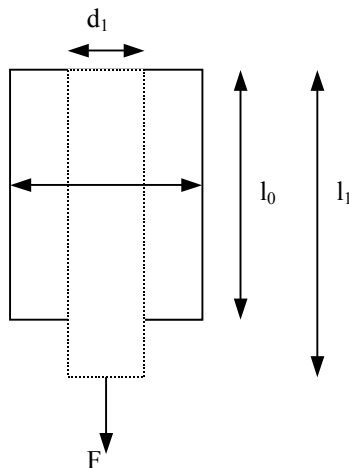
Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve kann sehr unterschiedlich für unterschiedliche Materialien ausfallen, z.B. Kupfer: großer plastischer Fließbereich

Grauguss: kaum plastische Verformung, Spröbruch.

Dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm werden die für technische Anwendungen wichtigen Materialparameter („*Kenngößen*“) entnommen: Proportionalitätsgrenze, Elastizitätsgrenze, (0,2%-)Dehngrenze, (obere und untere) Streckgrenze, Bruchdehnung und Fließgrenze.

Diese Kenngößen sind für die gängigen Werkstoffe tabelliert. Der Konstrukteur wählt den Werkstoff danach für die vorgesehene Anwendung und unter Berücksichtigung der Kosten aus.

Querschnittsänderung bei einseitigem Zug:



Dehnung  $\varepsilon = \Delta l / l_0 = (l_1 - l_0) / l_0$   
 $l / l_0 = \varepsilon + 1$   
 $\Delta d / d = \mu \cdot l / \Delta l$

Definition Querkontraktionszahl  $\mu$

$$\mu = \frac{\Delta d}{d_0} : \frac{\Delta l}{l_0} \quad \begin{array}{l} \Delta d = d_0 - d_1 \\ \Delta l = l_1 - l_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_1 - V_0 = d_1^2 l_1 - d_0^2 l_0 \\ &= (d_0 - d_1)^2 (l_0 + \Delta l) - d_0^2 l_0 \\ &= d_0^2 \Delta l - 2 \Delta d d_0 l_0 - 2 \Delta d \Delta l d_0 + \Delta d^2 l_0 + \Delta d^2 \Delta l \end{aligned}$$

⏟  
fällt für kleine  $\Delta d, \Delta l$  weg

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V}{d_0^2 l_0} = \frac{d_0^2 \Delta l - 2 \Delta d d_0 l_0}{d_0^2 l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{2 \Delta d}{d_0} = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{2 \mu l_0}{\Delta l} = \varepsilon (1 - 2 \mu)$$

Im Zugversuch ist  $\Delta V > 0 \Rightarrow \mu < 0,5$  (für  $\mu = 0,5 \Rightarrow \Delta V = 0$ )

Zahlenwerte  $E = 20 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$   $\mu \approx 0,3$  für Stahl

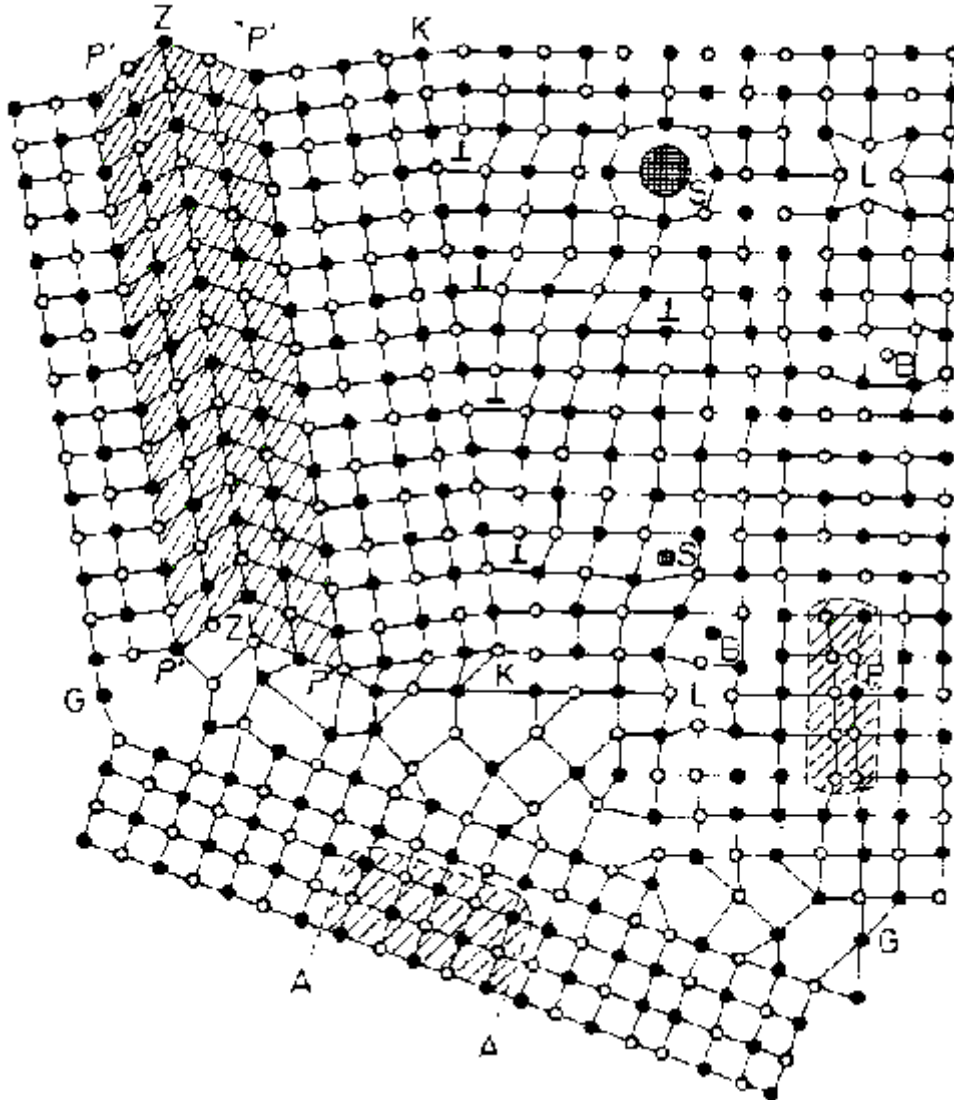
$E = 10 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$   $\mu \approx 0,35$  für Kupfer

Momentane Spannung:

$$\mu = \frac{F}{A} = \frac{F(1 + \varepsilon)}{A_0(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon)} \quad \left( \frac{\Delta V}{V} = \frac{Al - A_0 l_0}{A_0 l_0} = \varepsilon(1 - 2\mu) \Rightarrow A \cdot l = A_0 \cdot l_0 (\varepsilon(1 - 2\mu) + 1) \right)$$

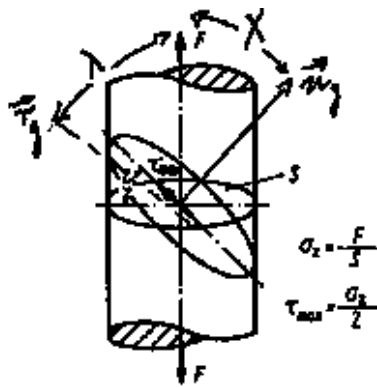
und mit  $\frac{l}{l_0} = \varepsilon + 1$  erhält man  $\mu$

Im Praktikum schätzen Sie ab, wie stark die Flächenänderung in Ihre Auswertung eingeht.



Zweidimensionaler Ausschnitt aus einem Schematischen Gefüge von geordneten Substitutionsmischkristallen (nach G. Petzow)

L: Leerstelle, B: Zwischengitteratom, S: Fremdatom,  $\perp$ : Versetzung, A-A: Antiphasengrenze, Z-Z: Zwillingskorngrenze, K-K Kleinwinkelkorngrenze, G-G: Großwinkelkorngrenze, P: kohärente Phasengrenze durch Entmischung, P' kohärente Phasengrenze durch Scherung

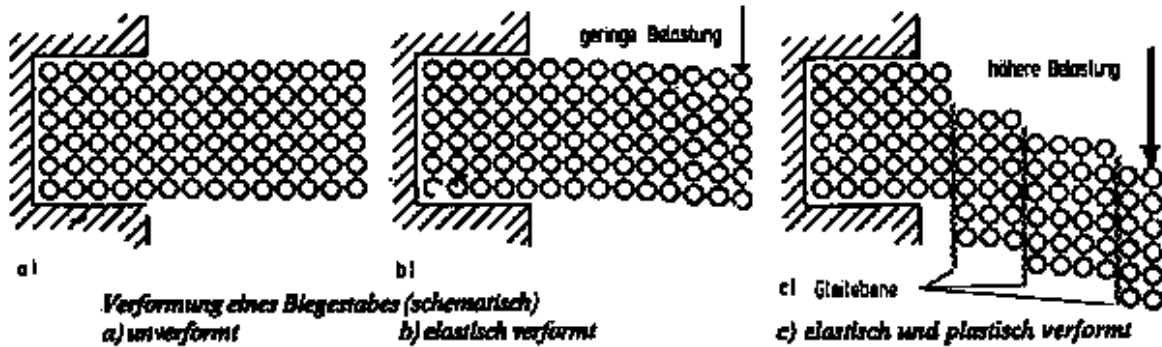


### Schmid'sches Schubspannungs-Gesetz

$$\tau = \sigma \cdot \cos \chi \cdot \cos \lambda$$

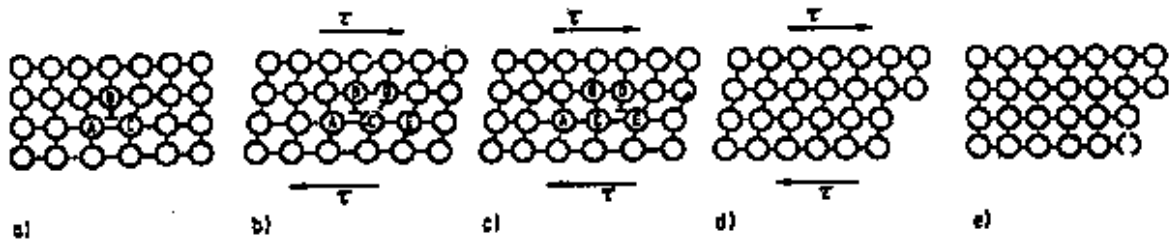
Schmid-Faktor

Normal- und Schubspannung bei einachsiger Zugbeanspruchung

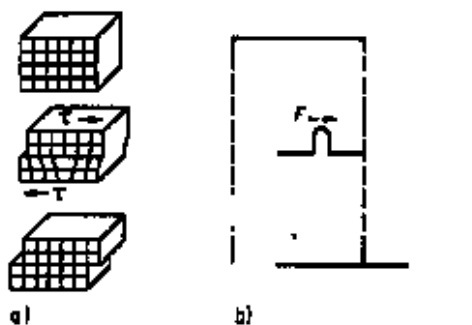


a) unverformt  
b) elastisch verformt

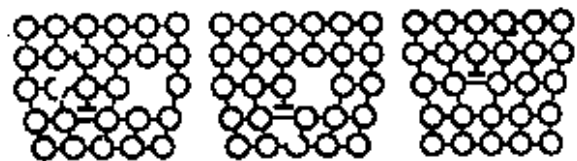
c) elastisch und plastisch verformt



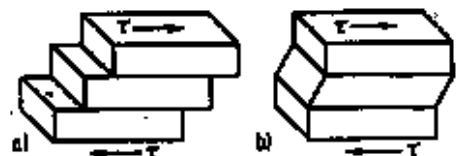
a) unverformter Gitteranschnitt mit Versetzung  $\perp$   
b) Verformung durch Schubspannung  
c) Verschiebung der Versetzung  $\perp$  um einen Atomabstand  
d), e) durchgelaufene Versetzung hat an der Oberfläche zu Stufenbildung geführt



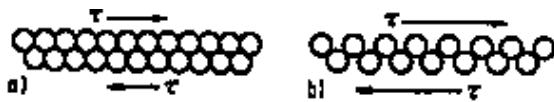
Versetzungsbewegung  
a) Abgleiten durch Versetzungsbewegung  
b) Verschieben eines Teppichs durch Wertschieben einer Falte



Klettern einer Stufenversetzung durch Anlagern einer Leerstelle



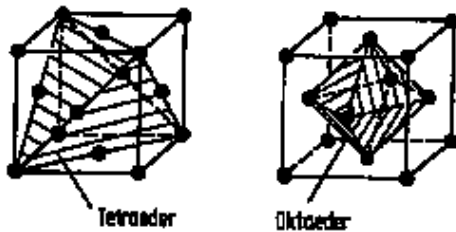
Plastische Verformung  
a) Gleitung  
b) Zwillingsbildung



Gleitbewegung auf Ebenen verschiede Packungsdichte  
 a) hohe Packungsdichte, geringe Schubspannung  
 b) geringe Packungsdichte, hohe Schubspannung



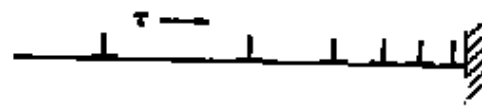
Dichtest besetzte Gleitebenen  
 a) Basisfläche im hcp-Gitter  
 b) Tetraederfläche im kfz-Gitter



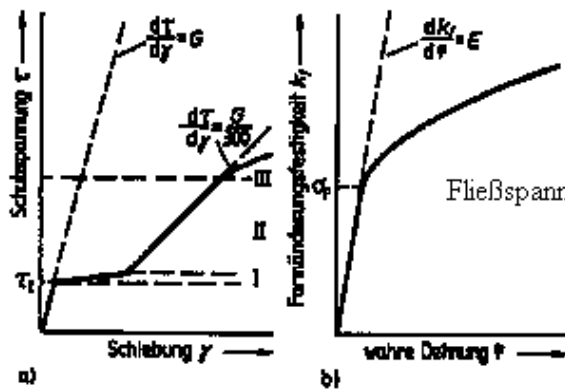
Gleitebenen im kfz-Gitter  
 a) Tetraederebenen b) Oktaederebenen  
 (beide Systeme sind gleichbedeutend)



Gleitrichtungen bei dichtester Kugelpackung



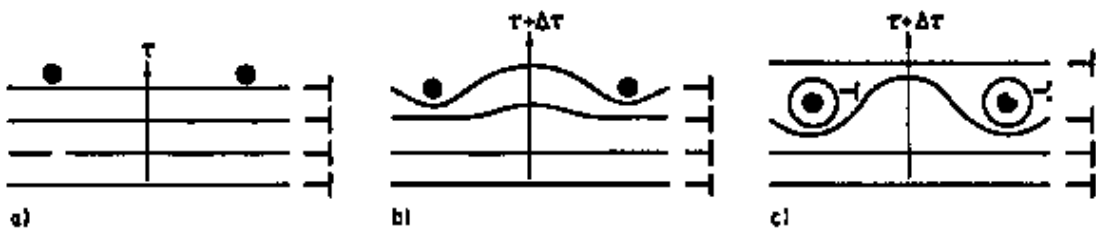
Versetzungsaufstau vor einem Hindernis



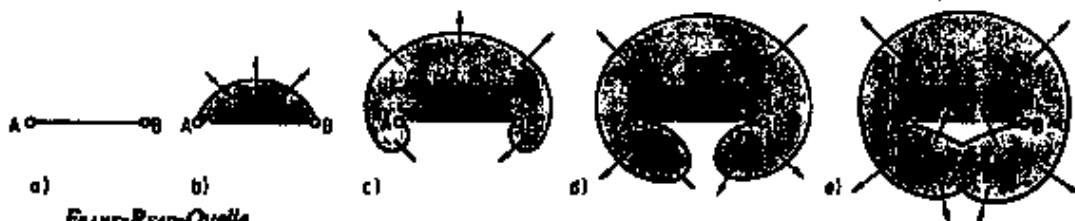
Fließkurven  
 a) kfz-Einkristall b) vielkristallines Metall

$$\sigma_F = 3 \cdot \tau_1 + c_1 \cdot \sqrt{N} + c_2 / \sqrt{d}$$

$\tau_1$  kritische Schubspannung  
 N mittlere Versetzungsdichte  
 d mittlerer Korndurchmesser



Orowan-Mechanismus  
 a) Versetzungsaufstau vor T-chen  
 b), c) Umgehen der Teilchen durch Spannungserhöhung  $\Delta \tau$  und Zurücklassen von Versetzungsringen



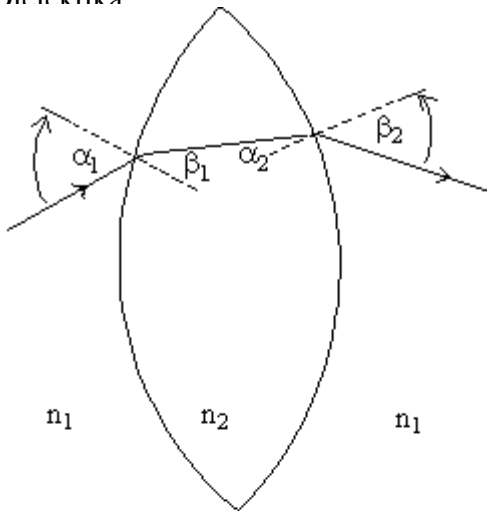
Frank-Read-Quelle  
 a) gleitfähiges Versetzungsteilück A-B  
 b) bis e) Erzeugung eines Versetzungsringes und eines neuen Teilstückes A-B durch Erhöhung der Schubspannungen

## 9. Versuch Optische Geräte und Linsenbrennweiten

- Aufgabe:
- Bestimmung der Brennweite
    - einer dünnen Linse
    - eines Linsensystems
  - Aufbau und Bestimmung der Vergrößerung eines
    - astronomischen Fernrohres
    - holländischen Fernrohres („Galileisches Fernrohr“)
    - Projektionsapparates

### 9.1. Grundlagen

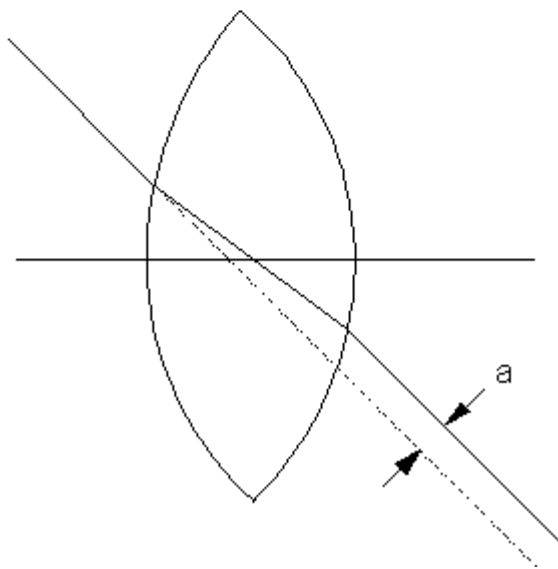
Die Wirkung der Linsen beruht auf der Brechung von Licht an der Grenzfläche von Dielektrika:



Für den Brechungswinkel gilt das „Snelliussche Brechungsgesetz“:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

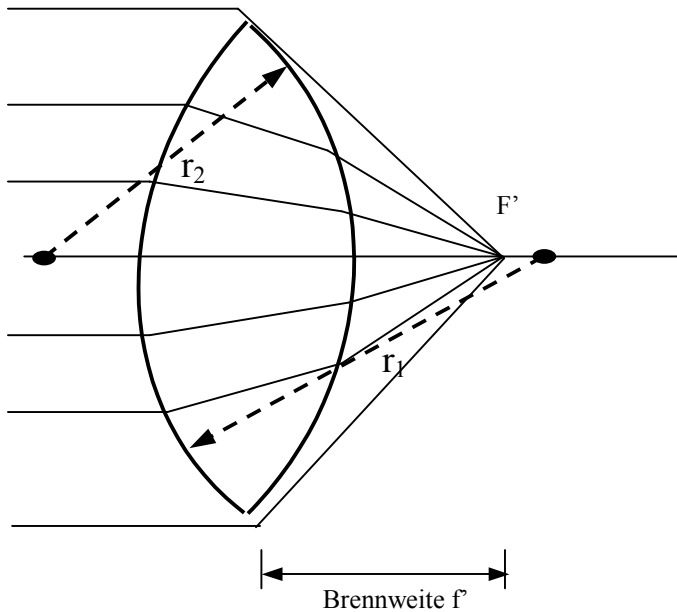
Einfache Linsen sind im allgemeinen durch Kugelflächen begrenzt („sphärische Linsen“).



Strahlen durch den Mittelpunkt werden aus Symmetriegründen nur parallel verschoben.

Bei dünnen Linsen gilt:  
Der Versatz  $a \approx 0$ .

Eigenschaften der bikonvexen Linse (d.h. beide Flächen sind nach außen gewölbt)



Parallel zur optischen Achse in die Linse einfallende Strahlen treffen sich im (bildseitigen) Brennpunkt  $F'$ .

Für die reziproke *Brennweite* gilt:

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

(Herleitung z.B. Gerthsen, Kap. 9.2)

Falls die Linse von Luft oder Vakuum umgeben ist, gilt für den Brechungsindex  $n_1 = 1$ .  $n_2$  ist der Brechungsindex des Glases (oder allgemein des Dielektrikums). Die Krümmungsradien der Linsenflächen zählen beide positiv, wenn sie nach links gewölbt sind. Im Beispiel hat also  $r_2$  einen

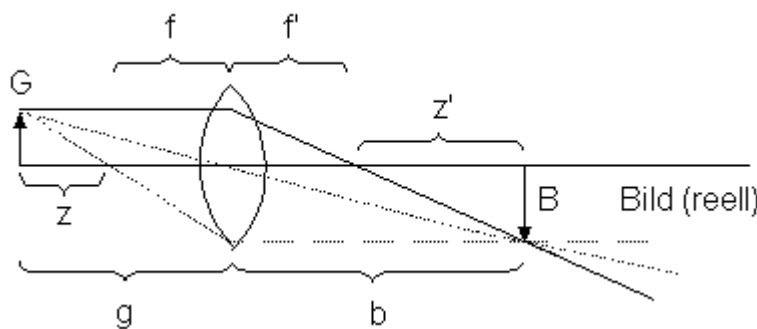
negativ Zahlenwert und es wird für diese bikonkave Sammellinse  $1/f = n_2 \cdot (1/|r_1| + 1/|r_2|)$ .

Wenn auf beiden Seiten der Linse dasselbe Medium (z.B. Luft) ist, so sind die gegenstandsseitige und die bildseitige Brennweite gleich. Der Strich am  $f$  kann daher weggelassen werden.

Die reziproke Brennweite  $1/f'$  nennt man *Brechkraft*. Sie hat die Einheit Dioptrie  $dp = m^{-1}$ .

### Die Abbildung durch Linsen

Der Abbildungsstrahlengang lässt sich mit den ausgezeichneten Strahlen (Brennpunktstrahlen und Mittelpunktsstrahlen) konstruieren.



Im gezeigten Beispiel ist das Bild reell, d.h. es kann z.B. mit einer Mattscheibe aufgefangen werden. Da üblicherweise auf beiden Linsenseiten dasselbe Medium (Luft) ist, ist  $f = f'$ .

Nach den Strahlensätzen ergibt sich für die Bildgröße  $B$ , Gegenstandsgröße  $G$ , Bildweite  $b$  und Gegenstandsweite  $g$  folgender Zusammenhang:

$$\frac{B}{b} = \frac{G}{g} \Rightarrow \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = M$$

$M$  ist der „Abbildungsmaßstab“, „Vergrößerung“

$$\frac{b-f}{f} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \Rightarrow 1/f = 1/g + 1/b$$

$$(g-f) \cdot (b-f) = z \cdot z' = f^2$$

„Abbildungsgleichung“

„Newtonsche Abbildungsgleichung“

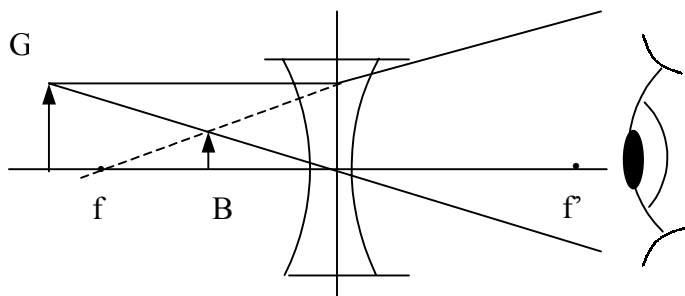
Die Linsenformel gilt auch für eine Zerstreuungslinse. Für eine Zerstreuungslinse ist  $f < 0$ .

Zur Übung: Zeigen Sie, dass bei Sammellinsen für  $g < f$  das Bild virtuell ist!

(Eigenschaften für die Abbildung mit einer Sammellinse:

$g > 2f$	$M < 1$	Bild: reell
$g = 2f$	$M = 1$	reell
$2f > g > f$	$M > 1$	reell
$f > g > 0$	$M > 1$	virtuell

Zweites Konstruktionsbeispiel (bikonkave Linse):



Hier ist das Bild virtuell, d.h. es liegt auf der Gegenstandsseite der Linse und kann nicht mit einer Mattscheibe aufgefangen werden.

## 9.2. Bestimmung der Brennweite mit Hilfe der Abbildungsgleichung

### a. Brennweite einer Sammellinse

Ein Gegenstand wird mit Hilfe einer unbekanntes Sammellinse auf eine Mattscheibe abgebildet. Wenn  $g + b$  fest ist, kann man beim Verschieben der Linse für nicht zu kleine  $g + b$  zwei Positionen mit scharfen Bildern finden (ein vergrößertes und ein verkleinertes Bild).

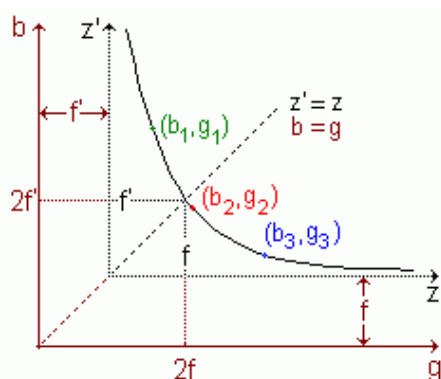
Die Bestimmung dieser beiden Positionen wird für verschiedene Abstände ( $b + g$ ) des Bildes vom Gegenstand durchgeführt und so einige Wertepaare ( $g, b$ ) gemessen.

### Auswertung

1. Rechnerisch mit Hilfe der Abbildungsgleichung durch Einsetzen von gemessenen Wertepaaren ( $g, b$ ). Es ist  $f = (g \cdot b) / (g + b)$  (Besselsches Verfahren)

2.1. Aus einer Graphik lässt sich recht einfach eine der drei Größen ( $f, g, b$ ) der Abbildungsgleichung ermitteln, wenn zwei von ihnen bekannt sind.

Ersetzen wir in der Abbildungsgleichung die Gegenstands- und die Bildweite  $g$  bzw.  $b$  durch die so genannten Brennpunktweiten (Abstände des Gegenstands bzw. Bilds von den zugehörigen Brennpunkten)  $z = (g-f)$  bzw.  $z' = (b-f')$ , so erhalten wir die Brennpunktweitengleichung oder *Newtonsche Abbildungsgleichung*:  $f \cdot f' = z \cdot z' = (g-f) \cdot (b-f')$



$z'(z) = f \cdot f' / z$  stellt eine *rechtwinklige Hyperbel* dar, deren Scheitel den Abstand  $f \cdot f'$  vom Ursprung des  $z-z'$ -Koordinatensystems hat. Also liegen die Werte  $(z, z')_i = (g_i - f, b_i - f')$  aus mehreren  $i$  Messungen mit unterschiedlichen Einstellungen von  $g$  und  $b$  auf dieser Hyperbel.

Das  $g-b$ -Koordinatensystem ist um  $(f, f')$  dagegen verschoben. Der Schnittpunkt der Messkurve mit der Winkelhalbierenden hat hier die Koordinaten  $(2f, 2f')$ .

Beweis: Für  $g = b$  und  $f = f'$  gilt nach Einsetzen in die Abbildungsgleichung:

$$1/f = 2/b = 2/g \Rightarrow b = g = 2f$$

Diese graphische Auswertung wäre ziemlich ungeschickt, weil das Zeichnen der Hyperbel schwierig ist und man eine Menge Messwerte ( $g, b$ ) zur Verfügung haben sollte.



2.2. erinnert man sich an den folgenden Satz aus der Geometrie, so lässt sich die Brennweite  $f$  sehr viel besser graphisch bestimmen:

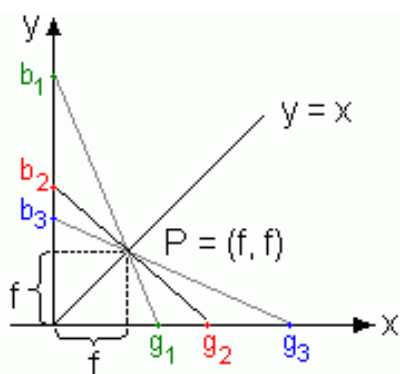
Legt man in einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y)$  durch den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $X = Y$  (Winkelhalbierende) eine Gerade, so bilden die Achsenabschnitte  $g$  und  $b$  ein konjugiertes Wertepaar mit dem Masstab  $(X \cdot Y)^{1/2}$ .

Beweis: Die Achsenabschnittsgleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten  $g$  und  $b$  lautet

$$\frac{x}{g} + \frac{y}{b} = 1$$

Wählen wir den speziellen Punkt  $P(f, f)$  auf der Winkelhalbierenden, durch den die Gerade gehen soll, so muss dieser Punkt die Geradengleichung erfüllen. Wir erhalten sofort

$$\frac{f}{g} + \frac{f}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{d.h. die Abbildungsgleichung}$$



Zur Bestimmung von  $f$  aus  $g$  und  $b$  tragen Sie auf der  $y$ -Achse die gemessenen Bildweite  $b$  und auf der  $x$ -Achse die zugehörige Gegenstandsweite  $g$  auf. Dann verbinden Sie beide Punkte mit einer Geraden.

Die Koordinaten des Schnittpunkts  $P$  der Verbindungsgeraden mit der Winkelhalbierenden sind die gesuchte Brennweite.

Wenn Sie mehrere Paare von gemessenen  $(g, b)_i$  auf gleiche Weise in das Diagramm eintragen, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in  $P$ .

Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Verbindungsgeraden und die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden untereinander streuen etwas. Daraus kann man den Fehler für  $f$  abschätzen.

## b. Die Brennweite eines Linsensystems

Bei der Kombination zweier Linsen mit Abstand  $d$  beträgt die Gesamtbrennweite (Herleitung siehe z.B. Paus, Kapitel 56.6):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Wie in vielen optischen Geräten ist auch im Versuch  $d \approx 0$ , da sich die Linsen berühren (oder in der Technik sogar zu einer Einheit verkittet sind). Es gilt dann:

*Die Brechkraften zweier hintereinander axial angeordneter Linsen addieren sich zur resultierenden Brechkraft des Systems.*

Dies rechtfertigt die Einführung der „Dioptrie“ = 1/Meter als zusätzliche Einheit in der Optik.

Es werden folgende Linsen verwendet:

- $f_1$ : bekannte Sammellinse
- $f_2$ : unbekannte Zerstreuungslinse

Wenn die Sammellinse stärker als die Zerstreuungslinse ist, d.h.  $|f_1| < |f_2|$  ist, so erhält man ein reelles Bild auf einem Schirm. Man bestimmt zunächst wie in Teil a. die Brennweite des Linsensystems und berechnet dann mit der bereits bekannten Brennweite  $f_1$  die Brennweite  $f_2$  der Zerstreuungslinse. Beachte:  $f_2$  einer Zerstreuungslinse ist negativ.

### 9.3 Optische Geräte

Der Zweck der im Versuch aufzubauenden Instrumente ist, Gegenstände vergrößert abzubilden bzw. größer zu sehen.

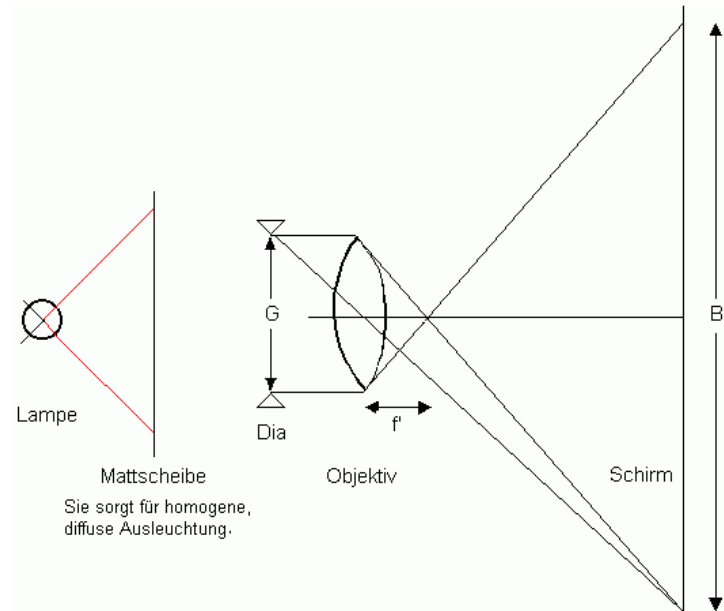
Die Abbildung ist charakterisiert durch den Abbildungsmaßstab  $M = \frac{B}{G}$

#### Beispiele

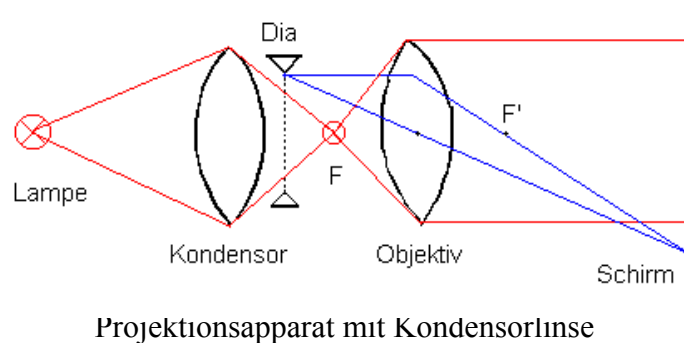
##### a) Projektionsapparat

Ein Nachteil der Ausleuchtung mit der *Mattscheibe* ist die *geringe Lichtstärke*.

Besser ist es, das Dia mit einer *Kondensorlinse* statt über eine *Mattscheibe* auszuleuchten.



Um möglichst viel Licht durch das Objektiv zu bekommen, bildet man die Lichtquelle mit dem Kondensator in die Brennebene („Pupille“) des Objektivs (oder ungefähr in das Objektiv) ab. Dieses Zwischenbild wird vom Objektiv weit ins Unendliche abgebildet, man erhält so eine gleichmäßige Ausleuchtung auf dem Projektionsschirm, ohne dass die Struktur der Glühwendel stört.



##### b) Fernrohre

Die Lupe und das Fernrohr dienen zur Vergrößerung des Schwinkels bei weit entfernten Gegenständen.

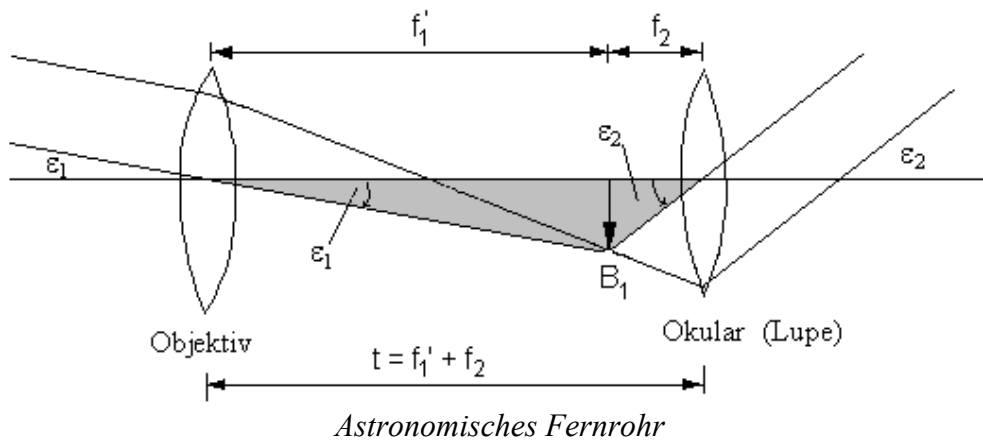
Für nahe liegende Objekte benutzt man eine Lupe. Sie wird im Fernrohr als Okular eingesetzt. Die Vergrößerung einer Lupe ist:

$$\text{Vergrößerung}_{\text{Lupe}} := \frac{\text{Schwinkel mit Instrument}}{\text{Schwinkel in 25cm Entfernung (deutliche Sehweite)}}$$

Allgemein definiert man die Vergrößerungszahl eines optischen Instrumentes (Fernrohr):

$$M = \frac{\tan \alpha_m}{\tan \alpha_0} \approx \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \quad \begin{array}{l} \alpha_m: \text{Schwinkel mit Instrument} \\ \alpha_0: \text{Schwinkel ohne Instrument} \end{array}$$

Strahlen, die von einem weit entfernten Objektpunkt ausgehen, gelangen annähernd parallel unter dem Winkel  $\varepsilon_1$  ins Fernrohr. Diese Strahlen werden in die Brennebene des Objektivs fokussiert und mit dem Okular als Lupe betrachtet. Dabei verlassen die Strahlen das Fernrohr wieder parallel, aber unter dem Winkel  $\varepsilon_2$  zur optischen Achse. Das Auge ist auf Unendlich akkommodiert, d.h. man schaut entspannt in die Ferne. Dies ist das Prinzip des astronomischen Fernrohrs.



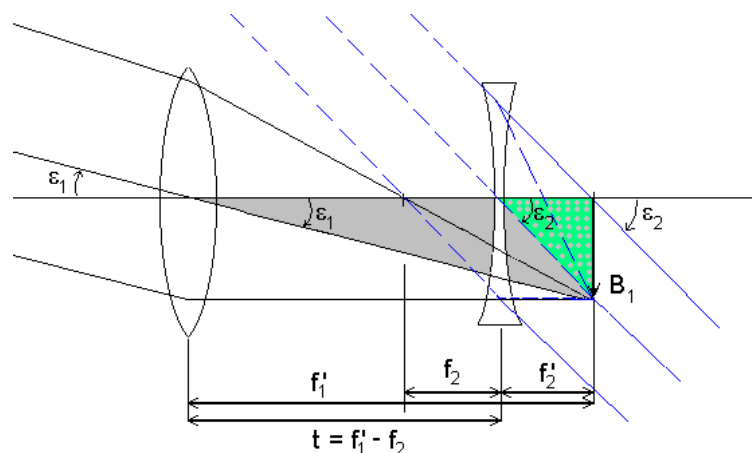
Aus dem Einfallswinkel  $\varepsilon_1$  und dem Sehwinkel  $\varepsilon_2$  folgt die Vergrößerung

$$M = \tan \varepsilon_2 / \tan \varepsilon_1 = - f_1 / f_2$$

Dass das Bild auf dem Kopf stehend gesehen wird, stört nicht so sehr beim Betrachten von Sternen. Ein Nachteil ist aber die große Baulänge  $t = f_1 + f_2$ .

Im *terrestrischen oder Keplerschen Fernrohr* wird die Bildumkehr mit Hilfe einer weiteren Sammellinse, der Zwischenlinse zwischen dem Objektiv und dem Okular erreicht. Sie bildet das erste Zwischenbild B1 in ein zweites reelles Zwischenbild B2 ab, das als vergrößertes Objekt in der vorderen Brennebene des Okulars liegt.

Beim *holländischen oder Galileischen Fernrohr* verwendet man eine Zerstreuungslinse als Okular. Sie hat die Funktion einer Lupe, mit der man das Bild B<sub>1</sub>, das vom Objektiv erzeugt wird, betrachtet. Dazu wird B<sub>1</sub> in die dem Beobachter zugewandte Brennebene gelegt. Man sieht ein virtuelles, vergrößertes Bild im Unendlichen.



#### *Holländisches oder Galileisches Fernrohr*

Die Vorteile dieser Bauart sind 1. eine kurze Baulänge  $t$  und ein aufrecht stehendes Bild. Holländische Fernrohre werden meistens als „Operngucker“ verwendet.

## 10. Versuch Die Absorption von $\gamma$ -Strahlen und Röntgenstrahlung

- Lernziel: Entstehung und Eigenschaften radioaktiver Strahlung, Aufbau und Wirkungsweise eines Röntgendiffraktometers
- Aufgabe: Messung der Schwächung von  $\gamma$ -Strahlen durch Blei  
Bestätigung des Duane-Hunt'schen Gesetzes – Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

### 1. Teil – Die Absorption von $\gamma$ -Strahlen

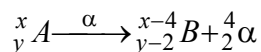
#### 10.1. Physikalische Grundlagen

Klassifikation der radioaktiven Strahlung –  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -Zerfall eines Atomkerns

- a) Beim  $\alpha$ -Zerfall wird ein  $\alpha$ -Teilchen (He-Kern bestehend aus 2 Protonen und 2 Neutronen) aus dem Kern abgegeben. Dabei verliert der Atomkern A
- 2 positive Elementarladungen
  - 4 atomare Masseneinheiten.

Das entstehende Atom rückt also um 2 Plätze nach links im Periodensystem.

Schreibweise:



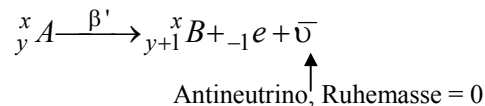
x: Masse

y: Ladung

- b)  $\beta$ -Zerfall

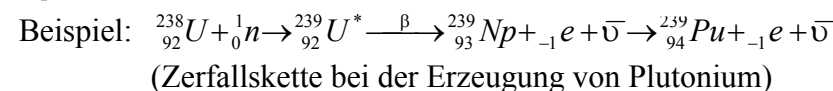
$\beta$ -Teilchen (= Elektronen) werden aus dem Kern emittiert.

$\Rightarrow$  Dabei vergrößert sich die positive Kernladungszahl um 1. Das entstehende Atom befindet sich auf einem Platz weiter rechts im Periodensystem.



$$\frac{m_{\beta}}{m_{prot}} \approx 5,4 \cdot 10^{-4}$$

*Das Antineutrino begleitet stets den  $\beta$ -Zerfall. Es wurde vor dem experimentellem Nachweis aufgrund des Energie- und Impulserhaltungssatzes vorhergesagt.*



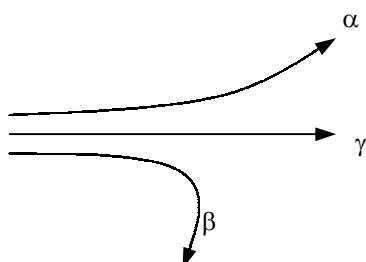
- c)  $\gamma$ -Strahlung

ist elektromagnetische Strahlung. Die Energie der Strahlungsquanten berechnet sich nach:

$$E = h \cdot \nu \quad h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js ist das Plancksche Wirkungsquantum, } \nu \text{ die Frequenz.}$$

Sie entsteht z.B. beim Abklingen der Anregung eines Atomkerns nach einem  $\alpha$ -,  $\beta$ -Zerfall. Radioaktive Strahlung kann in elektromagnetischen Feldern nach Ladung, Impuls und kinetischer Energie (Masse) getrennt werden.

Beispiel Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene:



Die Bahnen werden sichtbar in der Nebelkammer.

vgl. „Kondensstreifen“

Bahnkurven von  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung im Magnetfeld.

Radioaktive Kerne zerfallen spontan, d.h. Aussagen über den Zerfallszeitpunkt lassen sich nur mit statistischen Methoden treffen.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls bei einer bestimmten Anzahl von Kernen N?

In der Zeit dt nimmt N um dN ab:

$$-\frac{dN}{dt} = \text{Zerfallsrate.}$$

Der Zerfall erfolgt stochastisch, d.h. die einzelnen Zerfallsereignisse treten unabhängig voneinander ein. Die Zerfallsrate ist proportional zur momentanen Anzahl der angeregten Atome. Daher ist:

$$-\frac{dN}{dt} \sim N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + \text{const}$$

$$\text{bei } t=0 \text{ sei } N = N_0 \Rightarrow \text{const} = \ln N_0$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \underline{\text{Zerfallsgesetz}}$$

Die Halbwertszeit  $t_H$  ist charakteristisch für die radioaktive Atomsorte (Isotop). Sie gibt an, nach welcher Zeit die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen ist.

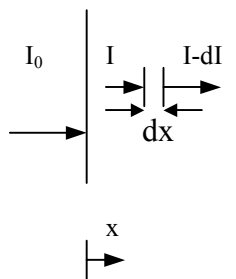
Mit  $t_H$  ins Zerfallsgesetz eingesetzt, erhält man:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_H}$$

$$t_H = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Beispiele:  $t_H$  von  ${}_{92}^{239}\text{U} = 24 \text{ min}$   
 ${}_{93}^{239}\text{Np} = 23,5 \text{ Tage}$   
 ${}_{94}^{239}\text{Pu} = 24000 \text{ Jahre}$

Frage: Wie wirkt Materie bei der Abschirmung von radioaktiver Strahlung?  
Strahlung wird durch Wechselwirkung mit Materie absorbiert.



Abnahme  $-\frac{dI}{dx} \sim I$  Die einzelnen Absorptionsprozesse sind von einander unabhängig (stochastisch).

Wie oben:  $-\frac{dI}{dx} = -\mu I \Rightarrow I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$   
**Absorptionsgesetz**

$\mu$  ist der *Absorptionskoeffizient*, hängt vom Absorber, der Art und Wellenlänge der Strahlung ab

$\mu/\rho$  ist der *Massenabsorptionskoeffizienten* ( $\rho$  ist die Dichte).

Bei der Absorption von  $\gamma$ -Strahlung spielen folgende Vorgänge eine Rolle:

- 1) Photoeffekt (Die Energie eines  $\gamma$ -Quants wird auf ein Elektron aus der Elektronenhülle übertragen)
- 2) Compton-Effekt (Impuls- und Energieübertragung zwischen  $\gamma$ -Quanten und Elektronen, aufzufassen als inelastischer Stoß, muß aber relativistisch berechnet werden.)

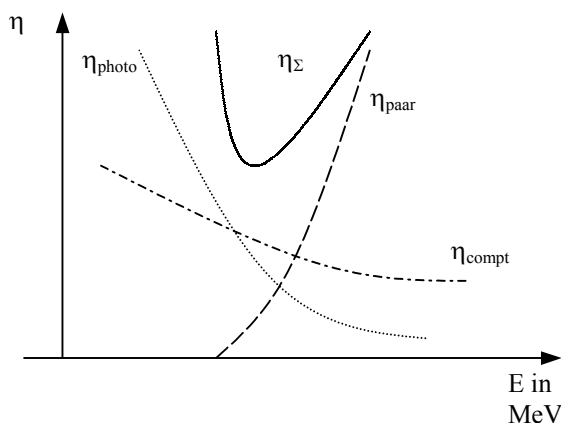
$$\Delta\lambda(\Theta) = \frac{h}{mc}(1 - \cos\Theta), \quad \Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{mc}$$

Änderung der Wellenlänge des Photons als Funktion des Ablenkwinkels  $\Theta$  und maximal mögliche Änderung der Wellenlänge.

- 3) Paarbildung: Umwandlung eines  $\gamma$ -Quants in ein Elektron-Positron-Paar, d.h. eine Umwandlung der Photonenenergie  $E_\gamma$  in massebehaftete Teilchen ist möglich. Das Energieäquivalent zur erzeugten Masse  $m$  ist  $E = mc^2$ .

Bei der Paarbildung gilt die Ladungserhaltung: Zu einem Elektron muss also gleichzeitig ein Teilchen mit positiver Elementarladung gebildet werden. Dieses Teilchen nennt man Positron  $e^+$ . Es ist das Antiteilchen zum Elektron und hat dieselbe Masse.

Wenn  $E_\gamma > 2 \cdot m_e \cdot c^2 \approx 1 \text{ MeV}$  ist  $\Rightarrow$  Bildung von  $e^+, e^-$  möglich

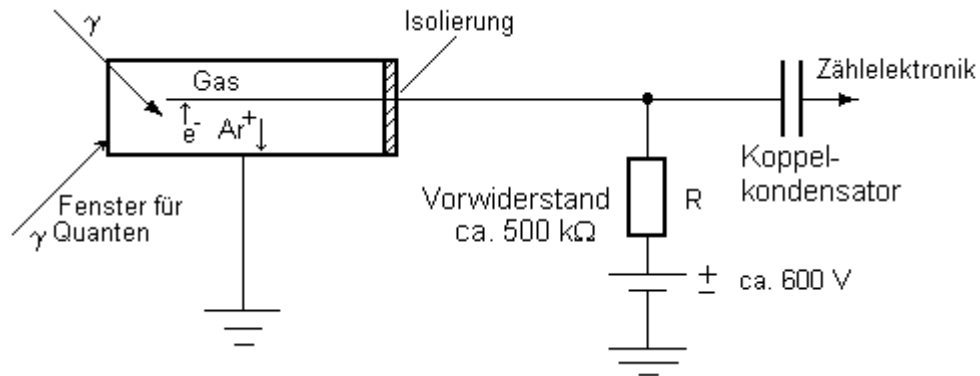


$\eta$ : Wirkungsquerschnitte der drei Prozesse

## Nachweis von Teilchen

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist zum Nachweis von  $\gamma$ -Quanten gut geeignet. In diesem Gerät wird die Eigenschaften von radioaktiver Strahlung ausgenutzt, Atome und Moleküle zu ionisieren. Die durch Ionisation erzeugten Ströme werden durch Stoßionisation im elektrischen Feld weiter verstärkt. Sie sind ein Maß für die Intensität der Strahlung.

### Aufbau



### Funktion

Das zylinderförmige Zählrohr ist z.B. mit etwa 100 mbar Ar und 10 mbar Alkoholdampf gefüllt. Die positive Spannung am axial angeordneten Zählrohrdraht wird gerade so hoch gewählt, dass noch keine Gasentladung zündet. Folgende Prozessschritte laufen ab:

$\gamma$ -Quant  $\rightarrow$  Ionisation  $\rightarrow$  Im radialen elektrischen Feld werden die Elektronen auf den Draht und die Ionen auf die Wand beschleunigt.  $\rightarrow$  Durch Stoßprozesse entsteht eine Lawine geladener Teilchen.  $\rightarrow$  Der Strompuls wird mit der Zähl elektronik registriert  $\rightarrow$  Es entsteht eine durch den Vorwiderstand stabilisierte Gasentladung  $\rightarrow$  Sie wird schnell gelöscht, weil die Alkoholmoleküle das von angeregten Atomen emittierte UV-Licht absorbieren. (Es wäre für die Aufrechterhaltung einer kontinuierlichen Gasentladung notwendig.)

Während des Andauerns der Lawine ist kein Nachweis eines zweiten Quants möglich (Totzeit). Mit dem Zählrohr im Praktikum kommt man auf Totzeiten von ca.  $10^{-4}$  s.

(Der Zählrohrdraht liegt auf positivem Potenzial, damit er nicht von Ionen getroffen und dadurch zerstäubt wird.)

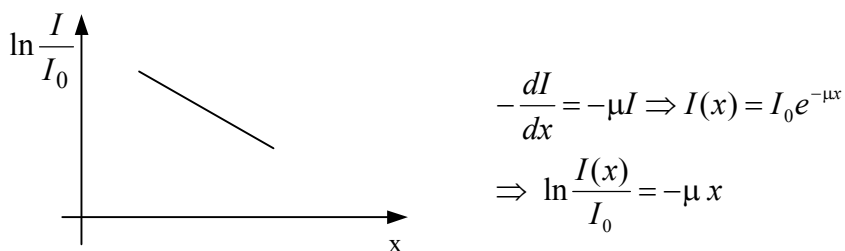
## 10.2. Versuchsdurchführung

### 1. Messen der Nullrate

(Zählrate ohne radioaktives Präparat; Ursache: Höhenstrahlung, Umgebungsstrahlung)

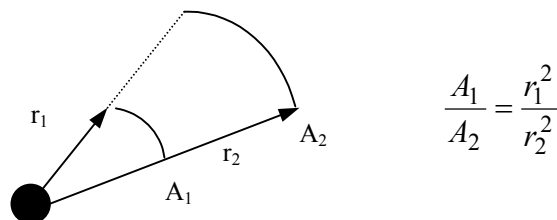
- Genauere Ermittlung der Nullrate, indem über eine längere Messzeit integriert wird, um in Aufgabe 2 und 3 eine Untergrundkorrektur durchführen zu können.
- Darstellung der Häufigkeitsverteilung der Zählraten  $n$  bei vielen wiederholten Messungen. Für stochastische Prozesse (d.h. Prozesse, deren Ereignisse unabhängig voneinander eintreten) erwartet man eine Normalverteilung (kontinuierliche Statistik) bzw. eine Poisson-Verteilung (diskrete Statistik).

### 2. Messen der Zählrate als Funktion der Dicke $x$ des abschirmenden Materials. Daraus erhält man den Absorptionskoeffizienten $\mu$ als Steigung der Ausgleichsgeraden $\ln I/I_0(x)$ .



### 3. Experimentelle Verifizierung des Abstandsgesetzes:

Bei einer *punktförmigen Quelle* ist die Anzahl der Quanten pro Raumwinkel konstant. Luft ist ein schlechter Absorber. Die Abnahme der Strahlung beruht daher auf der abnehmenden Bestrahlungsdichte (Quanten pro Flächeneinheit  $A$ ).



Daraus folgt das **Abstandsgesetz**  $I(r) \sim 1/r^2$

Aus dem Absorptions- und dem Abstandsgesetz folgt:

Vor radioaktiver und Röntgen-Strahlung kann man sich durch eine Abschirmung und durch Einhalten eines ausreichenden Abstands schützen.



## 2. Teil - Röntgenstrahlung

### Aufgaben

1. Überprüfung des Duane-Huntschen Gesetzes und Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums  $h$ .
2. Messung des ungefilterten Röntgenspektrums aus einer Röhre mit Kupferanode für verschiedene Beschleunigungsspannungen (15 - 25 kV, in 2 kV Stufen).

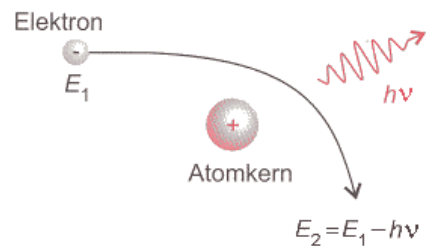
Dazu wird ein nach (200) oberflächenorientierter LiF-Einkristall in 9-Schritten und das Zählrohr in 29-Schritten um eine gemeinsame Achse gedreht.

Notwendige Konstanten:  $e = -1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  von LiF für  
 $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$

Wellenlängen für die charakteristischen Linien:

$K_\alpha$  : 155,3 pm

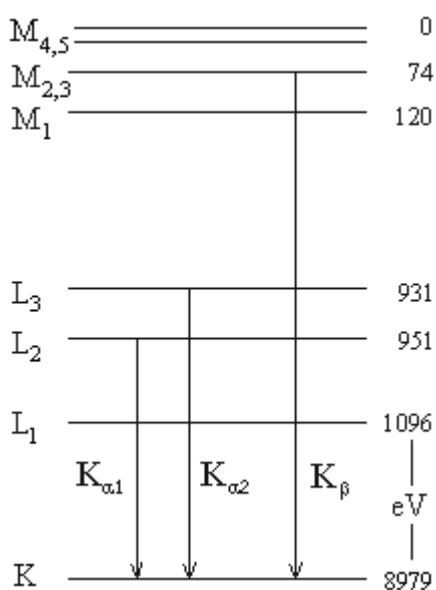
$K_\beta$  : 139,5 pm



Zur Entstehung der Bremsstrahlung

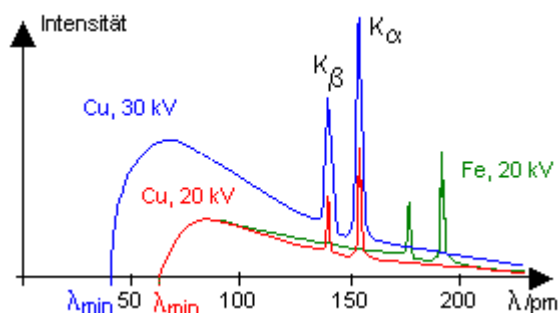
### Die Entstehung von Röntgenstrahlen

Treffen hochenergetische Elektronen auf Materie, so werden Röntgenstrahlen emittiert. Ein großer Teil der Röntgenstrahlen entsteht unmittelbar bei der Abbremsung der Elektronen im Potentialfeld der Atome und heißt deshalb *Bremsstrahlung*. Die Bremsstrahlung hat, zeitlich gemittelt über alle Bremsprozesse und alle Primärelektronen, ein *kontinuierliches Spektrum*. Außerdem treten Röntgenstrahlen mit diskreter Energien und hoher Intensität auf (*Linienpektrum*). Die Entstehung dieser für die emittierenden Atome *charakteristischen Strahlung* ist aus dem Termschema der Atome erklärbar. Charakteristische Röntgenstrahlung entsteht, wenn z.B. ein gebundenes Elektron aus der K-Schale durch ein schnelles Elektron aus dem Atom herausgeschlagen wird. Durch ein weiter außen sitzendes Hüllenelektron wird dann die K-Schale aufgefüllt, und die freiwerdende Differenzenergie aus den Bindungsenergien der beiden beteiligten Elektronenschalen wird als Röntgenstrahlung abgegeben.



Termschema von Kupfer

Die Übergänge  $L_1 \rightarrow K$  und  $M_1 \rightarrow K$  treten wegen der Auswahlregel  $\Delta l = \pm 1$  nicht auf.



Die Röntgenspektren von Kupfer und Eisen

Auf der Seite der kurzen Wellenlängen (hohen Quantenenergien  $h\nu$ ) ist das Röntgen-Bremsspektrum scharf durch eine Grenzwellenlänge  $\lambda_{gr} = \lambda_{min}$  begrenzt. Diese kürzeste Wellenlänge im Spektrum nimmt mit zunehmender Anodenspannung ab.

Duane und Hunt fanden empirisch den Zusammenhang:

$$U \cdot \lambda_{min} \approx 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m}$$

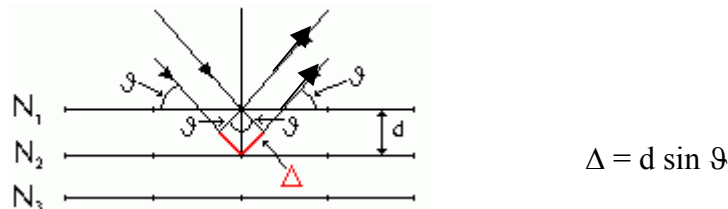
Diese Beziehung kann leicht aus der Quantentheorie hergeleitet werden, wenn man bedenkt, dass ein Elektron maximal seine gesamte kinetische Energie  $e \cdot U$  auf ein Röntgenquant übertragen kann:

$$E_{kin} = e \cdot U = h \cdot \nu_{gr} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{min}} \Rightarrow U = \frac{h}{e} \nu_{gr} \quad \text{und} \quad U \cdot \lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e}$$

Dabei ist  $e$  = Elementarladung  $c$  = Lichtgeschwindigkeit  
 $\nu_{gr}$  = (Grenz-)Frequenz  $\lambda_{min} = \lambda_{gr}$  Grenzwellenlänge  
 $h$  = Plancksches Wirkungsquantum  $U$  = Anodenspannung, Beschleunigungsspannung

Die Braggsche Reflexionsbedingung verwenden wir zur Ermittlung von  $\lambda_{min}$

Röntgenstrahlen können durch Beugung nach ihrer Energie und Richtung zum Kristallgitter selektiert werden. Die Intensitätsmaxima eines Beugungsdiagramms vom Kristallgitter eines Festkörpers können in einem sehr vereinfachenden Modell nach William Henry und William Lawrence Bragg als „Reflexion“ und Interferenz des Primärstrahls an einer Schar paralleler „Netzebenen“ interpretiert werden. Sie nehmen an, dass mit Atomen dicht besetzte Ebenen im Kristall (man nennt sie Netzebenen) wie „Elementarspiegel“ wirken. Die „Reflexion“ erfolgt nach den optischen Gesetzen, die Netzebenen „spiegeln“ jedoch nur, wenn die Bedingung für konstruktive Interferenz erfüllt ist:



Reflexion an benachbarten Netzebenen

Damit sich die Strahlen, die von zwei Nachbarebenen im Abstand  $d$  reflektiert wurden, durch Interferenz verstärken, muss ihr Gangunterschied  $2\Delta$  ein Vielfaches  $n$  von  $\lambda$  sein.

$$2d \sin \vartheta = n \lambda \quad \text{Beugungsordnung } n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ ( Braggsche Gleichung )}$$

Kennt man  $\lambda$  und den Braggwinkel  $\vartheta$ , so kann man den Netzebenenabstand  $d$  berechnen.

Für Kristalle mit orthorhombischer Symmetrie gilt:

$$\frac{1}{d(h_1, h_2, h_3)} = \sqrt{\left(\frac{h_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{a_3}\right)^2}$$

$a_1, a_2$  und  $a_3$  sind die Kantenlängen der rechtwinkligen Elementarzelle,  $h_1, h_2$  und  $h_3$  sind die Millerschen Indizes der betrachteten Schar paralleler Netzebenen.

Daraus folgt für den kubischen Kristall mit  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ :

$$d(h_1, h_2, h_3) = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

### Bestimmung des Planckschen Wirkungsquants

Für den intensitätsstarken 200-Reflex von LiF (kubisch flächenzentriertes Gitter) beträgt

$$d_{200} = a/2.$$

Als Nächstes ermitteln wir die *minimale Wellenlänge* (d.h. die Grenzwellenlänge) aus den gemessenen Röntgenspektren als Funktion der Anodenspannung. Dazu setzen wir den Winkel der kleinsten Ablenkung in die Braggsche Gleichung ein

$$\lambda_{\min} = 2d \sin \vartheta$$

Daraus berechnen wir die Grenzfrequenz über  $\nu_{\text{gr}} = c/\lambda_{\min}$ .

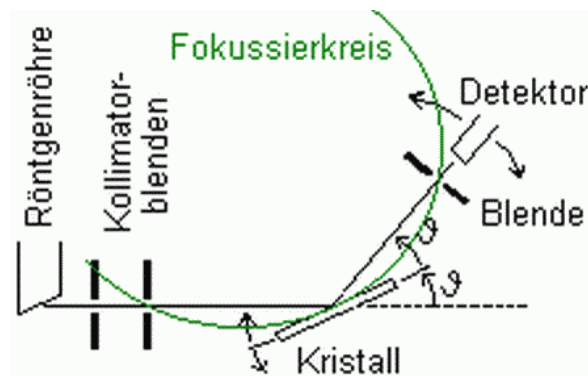
Schließlich tragen wir die Anodenspannungen  $U$  über den ermittelten Grenzfrequenzen  $\nu_{\text{gr}}$  auf

$$U(\nu_{\text{gr}}) = h/e \cdot \nu_{\text{gr}}$$

und errechnen aus der Steigung  $h/e$  der Ausgleichsgeraden das gesuchte Plancksche Wirkungsquantum.

### Verständnisfragen

1. Wo liegen die  $K\alpha$  und  $K\beta$ -Linien in den gemessenen Röntgenspektren, wenn Sie die Beschleunigungsspannung variieren?
2. Warum wird bei der Aufnahme der Röntgenspektren der Kristall um  $\vartheta$  und synchron dazu der Detektor um  $2\vartheta$  gedreht? (Die gemeinsame Drehachse steht senkrecht auf der „Beugungsebene“ (= Zeichnungsebene), die durch den primären und den abgebeugten Röntgenstrahl aufgespannt wird. Sie geht durch den Auftreffpunkt des Röntgenstrahls auf den Kristall.)



Röntgenspektrometer (wellenlängendispersiv)

# C. Anhang: Einführung in die Datenanalyse

(nur zur Information, kein Prüfungstoff)

## 1.1 Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen

Als Messergebnisse fallen Daten an, die numerisch bzw. statistisch weiter aufbereitet werden müssen. Für die statistische Auswertung bedient man sich dabei der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mathematischen Statistik. Bei einem zufallsbedingten Vorgang spricht man von einem *stochastischen* Vorgang. Eine Zufallsvariable oder stochastische Variable ist eine Größe, die bei einem Zufallsexperiment auftreten kann. Hat man ein Experiment durchgeführt, bei dem die Zufallsvariable  $X$  einen Wert  $x$  angenommen hat, so nennt man  $x$  eine Realisierung (sprich: Messwert) von  $X$ . Die *Grundgesamtheit* ist die Menge *aller* möglichen Realisierungen einer Zufallsvariablen, die *Stichprobe* ist die *n-fache* Realisierung. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen konkrete Messergebnisse  $x$  auftreten können, werden durch die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  der entsprechenden Zufallsgröße  $X$  bestimmt:

$$F(x) = P \{X < x\}$$

Hier ist  $P\{X < x\}$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Realisierung der Zufallsgröße  $X$  (d.h. ein Messergebnis) kleiner als  $x$  ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  irgendeinen Wert  $x$  im Intervall von  $a$  bis  $b$  annimmt, bezeichnet man mit  $P\{a < x < b\}$ . Entsprechend ist  $P\{-\infty < x < +\infty\}$  das sichere Ereignis, da  $X$  ja stets irgendeinen Wert auf der Zahlengeraden annehmen muss. Aus dem gleichen Grund gilt

$$P\{x \leq c\} + P\{x > c\} = 1 \quad \text{oder} \quad P\{x > c\} = 1 - P\{x \leq c\}$$

Im Falle von stetigen Zufallsgrößen wird zur Beschreibung der Verteilungsfunktion auch die sogenannte *Dichteverteilungsfunktion*  $f(x)$  herangezogen:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad , \text{ wobei } \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 \quad \text{und} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{ist.}$$

Wenn  $f(x) = \text{const.}$  über den ganzen zulässigen Definitionsbereich von  $f(x)$  ist, sagt man, dass die Zufallsgröße  $X$  *gleichverteilt* ist.

Die bekannteste und am häufigsten verwendete Verteilungsfunktion ist die *Gaußverteilung* oder *Normalverteilung*, die durch das *Gaußsche Fehlerintegral*

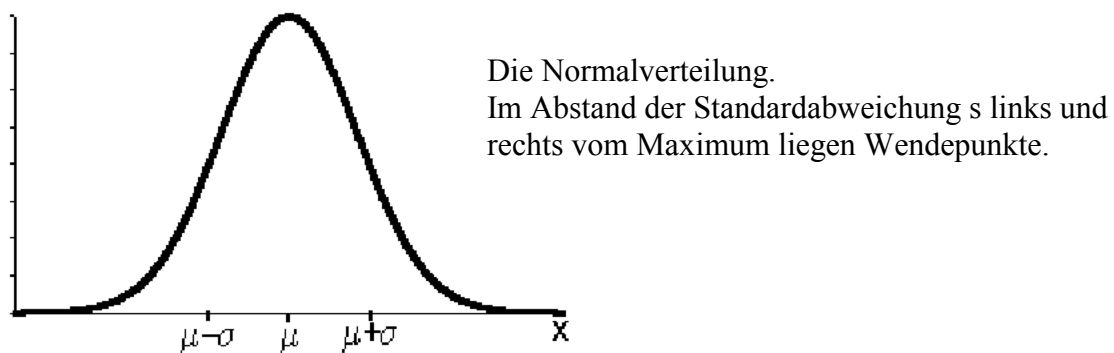
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi$$

beschrieben wird. Die Dichtefunktion der Gaußverteilung ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Diese Dichtefunktion ist symmetrisch. Sie wird auf Grund ihrer Form als "Glockenkurve" bezeichnet. Die Ergebnisse *wiederholter Messungen* zeigen häufig diese Verteilung, insbesondere wenn die Schwankung der Messwerte durch viele voneinander unabhängige und gleich wirkende Faktoren bestimmt wird, die Faktoren Zeit und Wachstum keine Rolle spielen, keine Selektion der Messwerte stattgefunden hat und wenn eine sehr große Zahl von Messungen durchgeführt wurde. Merkmale von Objekten, die unter ähnlichen Bedingungen entstanden sind oder wiederholt gemessen wurden, sind *in der Praxis oft angenähert normalverteilt*. Dagegen zeigen Verteilungen, wie sie beispielsweise in der chemischen Analyse auftreten, oft starke Abweichungen von der Normalverteilung. Unsere Grundgesamtheiten sind im Gegensatz zur Normalverteilung meist endlich, bestehen selten aus kontinuierlichen Werten und weisen häufig asymmetrische, zuweilen auch mehrgipflige Häufigkeitsverteilungen auf.

Abweichungen von der Normalverteilung können aber auch auf der Verwendung einer ungeeigneten Maßeinheit beruhen. Flächen und Gewichte von Organismen (z.B. Blätter) sind gewöhnlich nicht normalverteilt. Es lohnt sich in diesen Fällen zu prüfen, ob die Quadrate oder Kuben normalverteilt sind. Dann ist eine *Transformation der Messwerte* zweckmäßig, z.B. durch Auftragen der Messwerte in einer quadratischen, kubischen oder logarithmischen Skala.



Die Gaußverteilung weist einige sehr günstige mathematisch-statistische Eigenschaften auf. Das Maximum der Glockenkurve liegt bei  $x = \mu$ . Der zweite Parameter  $\sigma$  bestimmt durch seine Größe, wie stark die möglichen Werte  $x$  um den Wert  $\mu$  streuen. Die Wendepunkte der Glockenkurve liegen bei  $\mu \pm \sigma$ .

Bei der Beurteilung von Stichprobenergebnissen wird häufig auf folgende Bereiche Bezug genommen:

- $\mu \pm 1,96 \sigma$  mit 95% der Gesamtfläche
- $\mu \pm 2,58 \sigma$  mit 99% der Gesamtfläche
- $\mu \pm 3,29 \sigma$  mit 99,9% der Gesamtfläche
  
- $\mu \pm 1\sigma$  mit 68% der Gesamtfläche
- $\mu \pm 2\sigma$  mit 95,5% der Gesamtfläche
- $\mu \pm 3\sigma$  mit 99,7% der Gesamtfläche

Anschaulich bedeutet dies: Bei einer normalverteilten Zufallsgröße ist eine Abweichung um mehr als  $\sigma$  vom Mittelwert etwa einmal in drei Versuchen zu erwarten, eine Abweichung um mehr als  $2\sigma$  etwa nur einmal in je 22 Versuchen und eine Abweichung um mehr als  $3\sigma$  etwa nur einmal in je 370 Versuchen oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich

ein Wert  $x$  vom Mittelwert absolut genommen um mehr als  $3\sigma$  unterscheidet, ist wesentlich kleiner als 0,003:

$$P\{|x - \mu| > 3\sigma\} = 0,0027$$

Untersucht man diskrete Zufallsgrößen  $X$ , deren Realisierungen nur aus einer abzählbaren Menge  $W$  von (diskreten, oft ganzzahligen) Werten stammen, so setzt man  $p_i = P\{X = x_i\}$ . Hier ist  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Realisierung der Zufallsgröße  $X$  den Wert  $x_i \in W$  annimmt. Also gilt

$$F(x) = \sum_i p_i \quad \text{mit } x_i < x \text{ und } x_i \in W$$

$$\sum_i p_i = 1 \quad \text{und } p_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \text{ mit } i \in W_i.$$

Die Funktion  $F(x)$  hat die Form einer Treppenkurve und wird auch als *Summenhäufigkeitsfunktion* bezeichnet.

## 1.2. Histogramme

Die numerische bzw. grafische Darstellung der Häufigkeiten von Ergebnissen einer Messserie  $\{x_1, \dots, x_n, \dots, x_N\}$  wird als (Häufigkeits-)Histogramm bezeichnet. Bei der numerischen Beschreibung eines Histogramms werden die einzelnen absoluten bzw. relativen Häufigkeiten  $H_n$  bzw.  $h_n$  des Messwertes  $x_n$  angegeben. Sie sind experimentelle Ergebnisse, die mit mehr oder weniger hoher Sicherheit eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit von Realisierungen  $x_n$  der Zufallsgröße  $X$  zulassen.

Bei der graphischen Darstellung eines Histogramms werden auf der Abszisse die Messwerte (oder die Messwertgruppen) und auf der Ordinate die zugehörigen Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten abgetragen.

Recht aussagekräftige Informationen über Verteilungsfunktionen  $F(x)$  geben *Quantile*. Als Quantil der Ordnung  $p$  oder  $p$ -Quantil einer Zufallsgröße  $X$  bezeichnet man die Zahl  $x_p$ , für die

$$x_p = \max ( X \mid F(x) \leq p )$$

gilt. Das Quantil  $x_{0,5}$  bezeichnet man als *Median* einer Verteilung  $F(x)$ .

Durch Quantile kann man eine Verteilung ähnlich gut charakterisieren wie durch Histogramme bzw. Summenhäufigkeitsfunktionen. Während allerdings bei Histogrammen die (meist äquidistanten) Werte  $x_n$  vorgegeben sind und nach den Häufigkeiten  $h_n$  gefragt wird, sind bei Quantilen die Argumente  $p$  vorgegeben und die Werte  $x_p$  der "Umkehrfunktion"

$$x_p = Q_x(p) = F^{-1}(p)$$

müssen bestimmt werden. Bei streng monoton wachsenden Verteilungsfunktionen existiert diese Umkehrfunktion immer.

## 2. Statistik

### 2.1. Statistische Maßzahlen

Bisher haben wir die Existenz einer Verteilungsfunktion  $F(x)$ , einer Dichtefunktion  $f(x)$  oder einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_i$  vorausgesetzt. In der Praxis kennen wir jedoch die Verteilungsfunktionen nicht. Wir verfügen nur über eine mehr oder weniger umfangreiche endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_N\}$  von Messwerten, die als *Stichprobe* aus einer *Grundgesamtheit* bezeichnet wird. Aus einer solchen Stichprobe kann man recht brauchbare Informationen über die Verteilungsfunktion der zugrunde liegenden Grundgesamtheit gewinnen.

Jede Funktion der  $N$  Stichprobenwerte heißt *statistische Maßzahl*. Besonders wichtig sind die den Momenten bzw. den zentralen Momenten entsprechenden Stichprobenmomente:

$$\bar{x}^k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^k \quad \text{bzw.} \quad \overline{(x - \bar{x})^k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^k .$$

Das *arithmetische Mittel*  $\bar{x}$  der Messwerte  $x_n$  (**Mittelwert**) ist nur ein Spezialfall ( $k = 1$ ) des allgemeineren *gewichteten Mittels*, bei dem man das *Gewicht* (d.h. die absolute Häufigkeit  $H_i$  oder die relative Häufigkeit  $h_i$ ) der einzelnen Messwerte kennen muss:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n H_n}{\sum_{m=1}^N H_m} = \sum_{n=1}^N x_n \frac{H_n}{\sum_{m=1}^N H_m} = \sum_{n=1}^N x_n h_n$$

Mittelwertmaße beschreiben eine Verteilungsfunktion nur ungenau, da man nicht weiß, wie weit die Einzelmesswerte um den jeweiligen Mittelwert streuen. Aus diesem Grunde müssen verschiedene Streuungsmaße berechnet werden. Das bekannteste Maß ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert, genannt *Standardabweichung*:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2} .$$

Der für eine Stichprobe berechnete Mittelwert  $\bar{x}$  bzw. die Streuung  $S^2$  sind lediglich *Schätzungen* für den Erwartungswert  $\mu$  und für die Varianz  $\sigma^2$  einer Verteilung. Wenn man den Mittelwert  $\mu$  der Grundgesamtheit kennt, so beträgt die Streuung der Messwerte um diesen "wahren" Wert nur

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2} .$$

Die Zuverlässigkeit einer Messreihe, d.h. des Mittelwertes wird durch die **Standardabweichung des Mittelwertes** beschrieben:

$$\sigma_m = \sigma/\sqrt{N} \quad \text{bzw.} \quad s_m = S/\sqrt{N} (= \Delta x).$$

In der Praxis sollten Fehlerschranken um den Mittelwert  $\bar{x}$  aus einer Messreihe durch Angabe des Vertrauensbereichs quantifiziert werden. Dazu verwendet man die *Studentsche t-Verteilung*. Das Messergebnis wird dann angegeben als

$$\bar{x} \pm t \cdot \sigma_m$$

wobei der Wert  $t$  aus Tabellen für eine statistische Sicherheit von 95% (bzw. 99% oder 99,9%) entnommen wird. Der Freiheitsgrad  $f$  der Studentschen Verteilung ist hier gleichzusetzen mit der Anzahl der Messwerte  $N$ , aus denen der Mittelwert berechnet wurde. Wenn wie häufig getan, als Ergebnis lediglich  $\bar{x} \pm \sigma_m$  angegeben wird, so würde dies (bei unendlich vielen verfügbaren Messwerten!) bedeuten, dass 68% der Messwerte um weniger als  $\pm \sigma_m$  um den Mittelwert schwanken, oder 1 von drei Messungen um mehr als  $\pm \sigma_m$  vom Mittelwert abweicht.

Vor der Berechnung des Mittelwertes  $\bar{x}$ , aber insbesondere der Standardabweichung  $\sigma_m$  sollten die Stichproben (Messreihe) auf Ausreißer getestet werden. Einen ersten Hinweis auf Ausreißer erhält man, wenn man die Daten graphisch aufträgt und kontrolliert, ob es nicht ungleichmäßige Häufungen in der Verteilung gibt, oder Messwerte "völlig aus der Reihe schlagen". Es empfiehlt sich dann, den Messvorgang noch einmal kritisch zu überdenken und krasse Messfehler von der weiteren Auswertung auszuschließen. Es wurden eine Reihe spezieller Ausreißertests entwickelt, die heute meist in Form von Rechenprogrammen angewendet werden. Naheliegender ist, den Datensatz auf (angenäherte) Normalverteilung zu prüfen.

## 2.2. Parametertests

In der mathematischen Statistik wird oft von vornherein angenommen, dass eine zu untersuchende Grundgesamtheit normalverteilt ist. Solche Annahmen werden aber beim praktischen Einsatz kaum überprüft. Das Histogramm einer Messwertserie gibt jedoch erste Hinweise über die eventuell zugrunde liegende Verteilung.

Mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsnetzes ("Wahrscheinlichkeitspapier") kann man sich graphisch einen Überblick verschaffen, ob eine Stichprobe angenähert normalverteilt ist. Zusätzlich erhält man den Mittelwert und die Standardabweichung der Verteilung. Das Wahrscheinlichkeitspapier ist so unterteilt, dass sich beim Einzeichnen die in Prozent ausgedrückten, jeweils fortlaufend addierten Häufigkeiten auf einer Geraden liegen, wenn sie einer Normalverteilung angehören. Die Ordinate des Netzes ist also nach der Gaußschen Normalverteilung skaliert. Die Abszisse kann linear oder logarithmisch eingeteilt sein. Da die "Schwänze" der Verteilungen häufig nur ungenau gemessen werden und oft sehr weit auslaufen, werden sie nicht berücksichtigt, d.h. die Bereiche um 0% und 100% Summenhäufigkeit lässt man weg.

Heute verwendet man meist Rechenprogramme, um den Test auf Normalverteilung von Stichproben durchzuführen.

Zur Beantwortung der Frage, ob Abweichungen in der Messung zufällig sind, benötigt man einen statistischen Test, um die hypothetisch vorausgesetzte Verteilung oder den hypothetisch angenommenen Wert ablehnen zu können oder um sagen zu können, dass 'nichts gegen die Hypothese spricht'. Tests dieser Art (ohne alternative Hypothese) nennt man *Signifikanztests*. Testet man ausschließlich Parameter von Verteilungsfunktionen, so spricht man von Parametertests, ansonsten liegt ein nicht-parametrischer Test vor.

Die in den meisten Anwendungsfällen getroffene Wahl einer Normalverteilung wird oft damit begründet, dass sich die Messwerte in Form einer Glockenkurve um den Mittelwert gruppieren. Beim bekanntesten Test der statistischen Testtheorie, dem *t-Test*, möchte man untersuchen, ob zwei Stichproben aus der gleichen (durch Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$



charakterisierten) *normalverteilten* Grundgesamtheit stammen. Die Überprüfung, ob Messwerte dieselbe Verteilung aufweisen, also überhaupt zur selben Grundgesamtheit gehören können, ist unbedingt erforderlich, wenn mehrere Stichproben aus unterschiedlichen Messreihen zusammengefasst werden sollen. Als Parameter werden für den Test nur der Umfang  $N_1$  und  $N_2$ , der Mittelwert  $M_1$  und  $M_2$ , sowie die Standardabweichung  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Stichproben benötigt.

Der Test selbst ist ein Parametertest, denn es wird lediglich die Hypothese  $F(X)=F(Y)$  überprüft. Der 'Rest', d.h. die Annahme, dass es sich um zwei normalverteilte Grundgesamtheiten handelt und dass deren Varianzen gleich sind, wird als erfüllt vorausgesetzt. Diese Voraussetzungen müssten jedoch vor der Anwendung des t-Testes eigentlich noch untersucht werden.

Mit einer vorzugebenden Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , die als *Signifikanzniveau* bezeichnet wird, soll die Hypothese "beide Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit" überprüft werden. Zu diesem Zweck berechnet man aus den beiden Stichproben  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}\}$  und  $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_2}\}$  ein Prüfmaß  $t$  als statistische Maßzahl:

$$t = \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 - 2)}{N_1 + N_2}}$$

$t$  ist eine Funktion der  $N_1 + N_2$  einzelnen Messwerte  $x_1, \dots, x_{N_1}$  und  $y_1, \dots, y_{N_2}$ , die als Realisierungen von  $N_1 + N_2$  Zufallsvariablen angesehen werden. Folglich ist auch  $t$  selbst die Realisierung einer Zufallsvariablen  $T$ . Die Verteilung dieser Zufallsvariablen ist durch die Funktion

$$F_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N_1 + N_2 - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N_1 + N_2 - 2}{2}\right)\sqrt{\pi(N_1 + N_2 - 2)}} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{\tau^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)^{-\frac{N_1 + N_2 - 1}{2}} d\tau$$

gegeben, die als 'Studentsche t-Verteilung mit  $(N_1 + N_2 - 2)$  Freiheitsgraden' bezeichnet wird. Hier bedeutet  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$  die Eulersche Gamma-Funktion. Für sie gilt  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Für ganzzahlige Werte kann die Formel  $\Gamma(n) = (n-1)!$  verwendet werden.

Wenn die beiden Mittelwerte  $M_1$  und  $M_2$  stark voneinander abweichen (der Absolutbetrag von  $t$  also einen großen Wert annimmt), wäre es sehr unwahrscheinlich, dass beide Stichproben derselben Grundgesamtheit entstammen, oder anders gesagt, es ist dann sehr wahrscheinlich, dass die beiden Messserien aus zwei verschiedene Grundgesamtheiten stammen. Die Wahrscheinlichkeit  $p = F_T(t)$ , dass eine Realisierung der Zufallsgröße  $T$  kleiner als  $t$  ist, wird durch die t-Verteilung  $F_T(t)$  bestimmt. Wenn umgekehrt eine Wahrscheinlichkeit  $p$  vorgegeben wird, so kann man daraus das Quantil

$$t_{p, N_1 + N_2 - 2} = F_T^{-1}(p, N_1 + N_2 - 2)$$

bestimmen. Soll die Gleichheitshypothese abgelehnt werden, so muss  $M_2$  deutlich kleiner oder deutlich größer als  $M_1$  sein bzw.  $t$  muss einen sehr großen Absolutbetrag besitzen. Dieses

'sehr groß' wird quantitativ durch einen *kritischen Bereich*  $K$  beschrieben. Da  $t$  positiv oder negativ werden kann, muss der Bereich  $K$  durch zwei Quantile der Form

$$K = \{ x \mid x \leq t_{\alpha/2; N_1+N_2-2} \text{ -- } x \geq t_{1-\alpha/2; N_1+N_2-2} \}$$

festgelegt werden, wobei die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  "möglichst klein" sein muss. Da die  $t$ -Verteilung symmetrisch ist, reicht es jedoch aus, den kritischen Bereich durch

$$K = \{ x \mid x \geq t_{1-\alpha/2; N_1+N_2-2} \}$$

zu beschreiben. Dann gilt

$$\alpha = P\{ |T| \geq t_{1-\alpha/2; N_1+N_2-2} \},$$

d.h. man prüft, ob der Betrag der Realisierung der Zufallsvariablen  $T$  größer oder gleich dem zu  $1-\alpha/2$  gehörenden Quantil ist.

Der  $t$ -Test ist ein verteilungsabhängiger Signifikanztest und sollte auf keinen Fall kritiklos angewendet werden. Die "Verteilungsabhängigkeit" bezieht sich auf zwei Voraussetzungen, nämlich auf normalverteilte Grundgesamtheiten und auf die Gleichheit der Varianzen beider Grundgesamtheiten. Oft liegt in der Praxis aber eine unsymmetrische oder "mehrgipflige" Häufigkeitsverteilung vor, so dass zumindest eine der beiden notwendigen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des  $t$ -Tests bereits verletzt ist.

### 2.3 Verteilungsfreie Tests

Die mit dem  $t$ -Test verbundenen Probleme der Fragwürdigkeit der notwendigen Voraussetzungen führen zu dem Wunsch, 'verteilungsfreie' Tests durchführen zu können. Da mit einem Histogramm eine recht aussagekräftige Information aber eine Stichprobe gegeben ist, liegt es nahe, nach dem Vergleich von Histogrammen zu fragen. Die maximale absolute Differenz zwischen zwei Summenhäufigkeitskurven kann bereits ein geeignetes statistisches Maß sein, um den Unterschied zu beschreiben. In der Statistik wird mit der Testgröße

$$d = \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \max_{-\infty < x < +\infty} [F_1(x) - F_2(x)]$$

gerechnet, die die Realisierung einer Zufallsgröße  $D$  ist. Dabei sind  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  die Summenhäufigkeitsfunktionen, d.h. die empirischen Verteilungsfunktionen. Für große Werte von  $N_1$  und  $N_2$  kann die *Kolmogorov-Verteilung*

$$F_D(d) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 d^2)$$

asymptotisch als Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $D$  verwendet werden.